UNIVERSITÄT SALZBURG

24.03.2015
Prof. Dr. Verena Bögelein

Analysis 1

4. Übungsblatt

Aufgabe 14

Zeigen Sie, dass die Menge $P(\mathbb{N})$ aller Teilmengen von $\mathbb{N}$ überabzählbar ist. (Hinweis: Nehmen Sie dazu an, dass es eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to P(\mathbb{N})$ gibt und betrachten Sie die Menge $\{x \in \mathbb{N} : x \notin f(x)\}$.)

Aufgabe 15

Gegeben seien die zwei komplexen Zahlen $z = 3 - i$ und $w = -1 + 2i$. Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil sowie den Betrag von

a) z^3; **b)** $1/z^2$; **c)** $z \cdot w$; **d)** $\bar{z}^2 + 1/w^2$.

Aufgabe 16

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die $|2 - |2 - x|| \leq 1$ gilt. Skizzieren Sie weiter die folgenden Mengen:

1. $A = \{\, z \in \mathbb{C} : |z + 1 + i| = |z - 3 - 3i| \,\}$;
2. $C = \{\, z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z^2) \leq 1 \,\}$.

Aufgabe 17

Komplexe Zahlen $z = x + iy$ stellt man graphisch dar in der *Zahlenebene* als Punkte mit Rechtswert $x = \mathrm{Re}(z)$ und Hochwert $y = \mathrm{Im}(z)$. Der Betrag $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ lässt sich interpretieren als Abstand von z zum Ursprung 0 der Zahlenebene, $|z - w|$ demgemäß als Abstand von z zu w. Die Einheitskreislinie S^1 ist die Menge aller $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$, also mit Abstand 1 zum Ursprung; sie wird auch beschrieben durch die Gleichungen $z\bar{z} = 1$ oder $x^2 + y^2 = 1$.

(i) Zeigen Sie, dass die Kreislinie $\{z \in \mathbb{C} :\ |z - w|^2 = r^2\}$ mit Mittelpunkt $w \in \mathbb{C}$ und Radius $r > 0$ beschrieben wird durch die Gleichung

$$z\bar{z} - 2\mathrm{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 - r^2 = 0$$

und dass umgekehrt jede Gleichung der Form

$$\alpha z\bar{z} - 2\mathrm{Re}(z\zeta) + \gamma = 0 \tag{1}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}_{\neq 0}, \zeta \in \mathbb{C}, \gamma \in \mathbb{R}$ und $\alpha\gamma < |\zeta|^2$ eine Kreislinie in $\mathbb{C}$ definiert.

(ii) Zeigen Sie: Im Fall $\alpha = 0, \zeta \in \mathbb{C}_{\neq 0}$ beschreibt dagegen die Gleichung (1) eine Gerade in $\mathbb{C}$ (ist also äquivalent zu einer Gleichung $ax+by+c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}, a^2+b^2 > 0$), und jede Gerade in $\mathbb{C}$ erhält man so.

Aufgabe 18

Folgern Sie aus Aufgabe 17: Ist $K \subset \mathbb{C}$ eine Kreislinie oder eine Gerade, so trifft das auch für das Bild $\{\frac{1}{z} : z \in K, z \neq 0\}$ unter der *Inversion* $z \mapsto \frac{1}{z}$ zu, wenn man es eventuell noch durch $\{0\}$ ergänzt. (Das Bild einer Kreislinie durch 0 ist eine Gerade, das einer Geraden nicht durch 0 eine Kreislinie.)