Analysis 1

8. Übungsblatt

Aufgabe 32

Wir definieren die beiden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $a_n := \frac{e^n+e^{-n}}{2}$ bzw. $b_n := \frac{n!}{n^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius und den offenen Konvergenzkreis der beiden Potenzreihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-i)^n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$, wobei $i \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit bezeichne.

Aufgabe 33

Für eine Potenzreihe $\gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ in $\mathbb{C}$ bezeichne $R_\gamma \in [0,\infty]$ den Konvergenzradius. Seien nun für die komplexen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Potenzreihen $\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\beta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ in $\mathbb{C}$ gegeben. Wir definieren zudem $(\alpha+\beta)(z) := \sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)z^n$ sowie das Cauchyprodukt $(\alpha\cdot\beta)(z) := \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ durch $d_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie:

(a) $R_{\lambda\cdot\alpha} = R_\alpha$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$,

(b) $R_{\alpha+\beta} \geq \min\{R_\alpha, R_\beta\}$,

(c) $R_{\alpha\cdot\beta} \geq \min\{R_\alpha, R_\beta\}$.

Aufgabe 34

Für eine Potenzreihe mit Konvergrenzradius $R \in [0,\infty]$ um $z_0 \in \mathbb{C}$ ist das Verhalten auf dem Rand des Konvergenzkreises $\partial B_R(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \colon |z-z_0| = R\}$ delikat und allgemeine Konvergenzaussagen sind nicht möglich. Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius und untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der folgenden Reihen auf deren Konvergenzkreis:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} z^k$,

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$,

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$.

Aufgabe 35

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, und es existiere ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $a_n > 0$ für alle $n \geq N$ erfüllt ist. Zeigen Sie:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$