UNIVERSITÄT SALZBURG

21.04.2015
Prof. Dr. Verena Bögelein

Analysis 1

6. Übungsblatt

Aufgabe 24

(a) Zeigen Sie die Gültigkeit der Bernoulli-Ungleichung für rationale Exponenten:

$$(1+x)^s \geq 1+sx \quad \text{für} \quad x>-1 \quad \text{und} \quad s\in\mathbb{Q},\ s>1,$$
$$(1+x)^s \leq 1+sx \quad \text{für} \quad x>-1 \quad \text{und} \quad s\in\mathbb{Q},\ 0<s<1.$$

(Hinweis: Sie dürfen die Bernoulli-Ungleichung für $s\in\mathbb{N}$ verwenden.)

(b) Für $x\in\mathbb{R}$ sei $e(x) := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Zeigen Sie, dass gilt: $e(s)=e(1)^s$ für $s\in\mathbb{Q}$.

(Hinweis: Sie dürfen diesen Zusammenhang für $s\in\mathbb{N}$ (siehe Vorlesung) und für $s=-1$ (siehe Übungsblatt 5) verwenden.)

Aufgabe 25

(a) Geben Sie eine Folge an, die

(i) genau einen Häufungswert in $\mathbb{R}$ hat, aber nicht konvergiert;

(ii) alle Elemente von $[-\infty,\infty]$ als Häufungswerte hat.

(b) Zeigen Sie: Eine beschränkte Folge komplexer Zahlen, die nicht konvergiert, besitzt mindestens zwei verschiedene Häufungswerte.

Aufgabe 26

Die Fibonacci-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist gegeben durch

$$f_0=f_1=1, \quad f_{n+2}=f_{n+1}+f_n,\ n\in\mathbb{N}_0.$$

Nun betrachten wir die Quotientenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$a_n=\frac{f_{n+1}}{f_n},\ n\in\mathbb{N}_0.$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen den goldenen Schnitt $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ konvergiert. (Hinweis: Untersuchen sie die Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ und $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}_0}$ jeweils auf Monotonie und Beschränktheit.)

Aufgabe 27

Jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ lässt sich trivialerweise als Partialsummenfolge einer Reihe schreiben (Reihen sind oft besser auf Konvergenz untersuchbar als Folgen):

$$a_n = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1} - a_k),\ n \geq 1. \tag{1}$$

Für reelle Zahlen a und b sei nun die rekursive Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegeben durch

$$a_0 = a, \quad a_1 = b, \quad a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}),\ n \geq 2.$$

(a) Suchen Sie, in einem ersten Schritt, eine explizite Formel für die Differenz $a_{k+1} - a_k$, $k \geq 0$.

(b) Zeigen Sie jetzt unter Verwendung von (1) und des Resultates aus (a), dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent ist, und bestimmen Sie ihren Grenzwert.