UNIVERSITÄT SALZBURG

12.05.2015
Prof. Dr. Verena Bögelein

Analysis 1

9. Übungsblatt

Aufgabe 36

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei gegeben durch die rationalen Ausdrücke

$$a_n = \frac{c_k n^k + c_{k-1}n^{k-1} + \ldots + c_1 n + c_0}{d_l n^l + d_{l-1}n^{l-1} + \ldots + d_1 n + d_0}$$

mit $k, l \in \mathbb{N}_0$, $c_i, d_j \in \mathbb{R}$ für $i \in \{0, \ldots, k\}, j \in \{0, \ldots, l\}$, und $c_k \neq 0 \neq d_l$. Erklären Sie, wie man an den führenden Potenzen n^k und n^l erkennen kann, ob eine solche Folge eine Nullfolge oder eine Unendlichfolge ist. Beweisen Sie Ihre Behauptung.

(Hinweis: Zeigen Sie $c_k - \varepsilon \leq c_k + c_{k-1}n^{-1} + \ldots + c_0 n^{-k} \leq c_k + \varepsilon$ für alle hinreichend großen n; entsprechendes beim Nenner.)

Aufgabe 37

Diskutieren Sie folgende Reihen mit dem Majorantenkriterium bzw. Minorantenkriterium auf absolute Konvergenz bzw. Divergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2/3} + 3^n}{n^{3/2} - n^2 3^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} - n}{n + n^2}.$$

Aufgabe 38

(a) Beweisen Sie die nachstehenden Additionstheoreme: Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

(i) $\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$,

(ii) $\sin(z + w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$,

(iii) $\tan(z + w) = \dfrac{\tan(z) + \tan(w)}{1 - \tan(z)\tan(w)}$.

(b) Beweisen Sie, dass für $x \in \mathbb{R}$, $x \neq (2k+1)\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, und $u = \tan(\frac{x}{2})$ gilt:

(i) $\sin(x) = \dfrac{2u}{1 + u^2}$,

(ii) $\cos(x) = \dfrac{1 - u^2}{1 + u^2}$.

Aufgabe 39

Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{n\to\infty} \log(n) = \infty$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^t} \log(n) = 0$ für $t > 0$;

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} \log(1 + x_n) = 1$ für jede Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$;

(c) $\lim_{n\to\infty} n \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) = x$ für $x > -1$;

(d) $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{q} - 1) = \log q$ für $q > 0$;

(e) $\lim_{n\to\infty} \frac{n(\sqrt[n]{n} - 1)}{\log(n)} = 1$.

(Hinweis: Benutzen Sie die Ungleichungen für den Logarithmus: $\frac{x}{x+1} < \log(1 + x) < x$ für $0 \neq x > -1$.)

Aufgabe 40

Beweisen Sie den Zwischenwertsatz für dehnungsbeschränkte Funktionen: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dehnungsbeschränkt, d.h. es gibt ein $L > 0$ mit

$$\big|f(x) - f(y)\big| \le L\,|x - y| \quad \forall\, x, y \in [a, b].$$

Dann existiert zu jedem y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$. (Hinweis: Definieren Sie eine passende Intervallschachtelung.)