UNIVERSITÄT SALZBURG

21.10.2019
Assoz.-Prof. Dr. Simon Blatt
Fachbereich Mathematik

Übungen zu Analysis I

2. Übungsblatt

Theorieaufgaben:

1. Definieren Sie den Begriff der *Beschränktheit* einer Menge $M \subset \mathbb{R}$ sowie die Begriffe *Supremum* und *Infimum*.
2. Definieren Sie den Begriff der *Intervallschachtelung* in $\mathbb{R}$ und formulieren Sie das *Vollständigkeitsaxiom* der reellen Zahlen.

Rechen- und Beweisaufgaben:

Übungsaufgabe 2.1. Zeigen Sie mit dem Prinzip der vollständigen Induktion, dass $n^3 - n$ durch 6 teilbar ist für alle natürlichen Zahlen n.

Übungsaufgabe 2.2. Bestimmen Sie alle reellen Zahlen, für diese die folgenden (Un)Gleichungen definiert sind, sowie die Lösungsmenge folgender (Bruchun)Gleichungen für $x \in \mathbb{R}$:

(a) $\dfrac{7-x}{2-\sqrt{x}} < 2,$ (b) $||x|-1| \cdot ||x|+1| = |x^2-1|.$

Übungsaufgabe 2.3. Geben Sie das Supremum und das Infimum folgender Teilmengen von $\mathbb{R}$ an (falls existent) und beweisen Sie Ihre Ergebnisse (Tipp: Archimedisches Axiom). In welchen Fällen liegt ein Maximum bzw. ein Minimum vor?

(a) $\left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\},$ (b) $\mathbb{Q} \cap [\sqrt{2}, \sqrt{3}),$

(c) $\left\{\dfrac{9n^2-4}{2n^2} : n \in \mathbb{N}\right\},$ (d) $\left\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\right\}.$

Übungsaufgabe 2.4. Zeigen Sie die folgenden Aussagen anhand der Körperaxiome der reellen Zahlen:

(a) Die reellen Zahlen besitzen ein *neutrales Element* $e_1 \in \mathbb{R}$ bezüglich der Addition, für welches gilt

$$a + e_1 = e_1 + a = a \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}.$$

(b) Die reellen Zahlen besitzen ein *neutrales Element* $e_2 \in \mathbb{R}$ bezüglich der Multiplikation, für welches gilt

$$a \cdot e_2 = e_2 \cdot a = a \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}.$$

(c) Jedes Element der reellen Zahlen $a \in \mathbb{R}$ besitzt ein bezüglich der Addition *inverses Element* $b \in \mathbb{R}$, für welches gilt

$$a + b = b + a = e_1.$$

(d) Jede reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, besitzt ein bezüglich der Multiplikation *inverses Element* $c \in \mathbb{R}$, für welches gilt

$$a \cdot c = c \cdot a = e_2.$$

Warum bilden die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ keinen Körper?

Übungsaufgabe 2.5. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a \leq b$ gegeben. Wir definieren nun das *arithmetische Mittel* $A(a,b)$ und das *geometrische Mittel* $G(a,b)$ sowie das *harmonische Mittel* $H(a,b)$ durch

$$A(a,b) := \frac{a+b}{2} \quad \text{und} \quad G(a,b) := \sqrt{ab} \quad \text{sowie} \quad H(a,b) := \frac{2ab}{a+b}.$$

Zeigen Sie, dass die folgende Ungleichungskette gilt:

$$a^2 \leq H(a,b)^2 \leq G(a,b)^2 \leq A(a,b)^2 \leq b^2.$$

Bemerkung: Da die Wurzelfunktion monoton ist, ergibt sich daraus die Ungleichungskette

$$a \leq H(a,b) \leq G(a,b) \leq A(a,b) \leq b.$$

Übungsaufgabe 2.6 (Zusatzaufgabe)**.** Zeigen Sie, dass eine beliebige Menge M echt weniger mächtig ist als ihre Potenzmenge $\mathcal{P}(M) := \{A : A \subseteq M\}$, also

$$|M| < |\mathcal{P}(M)|.$$