UNIVERSITÄT SALZBURG

04.11.2019
Assoz.-Prof. Dr. Simon Blatt
Fachbereich Mathematik

Übungen zu Analysis I

4. Übungsblatt

Theorieaufgaben:

1. Definieren Sie den Begriff einer *Folge komplexer Zahlen* und definieren Sie den Begriff des *Grenzwerts* einer *konvergenten Folge* in $\mathbb{C}$.
2. Zählen Sie fünf Rechenregeln für konvergente Folgen in $\mathbb{C}$ auf.

Rechen- und Beweisaufgaben:

Übungsaufgabe 4.1. Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $\left(\dfrac{2(n+2)^2+2}{n^2+3n+2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (b) $\left(\dfrac{5n^5}{n^4+n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (c) $\left(\dfrac{4-i}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Übungsaufgabe 4.2. Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $\left(\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ für $a,b,c\in\mathbb{R}$ mit $a,b,c>0$,

(b) $\left((\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n+2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

(c) $\left(\frac{ni+1}{2ni^n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

(d) Freiwilliger Zusatz (unbewertet): $\left(\frac{i^n}{n^{(i^{2n})}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Übungsaufgabe 4.3. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig.

(b) Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Übungsaufgabe 4.4. Es seien $0<a<b$ positive Zahlen. Man definiere die Intervalle $[a_n,b_n]$ rekursiv durch $a_1=a$, $b_1=b$ sowie $a_{n+1}=H(a_n,b_n)$, $b_{n+1}=A(a_n,b_n)$.

(a) Zeigen Sie, dass diese Intervalle eine $\sqrt{ab}$ enthaltende Intervallschachtelung bilden. (Hinweis: Zeigen Sie u.a. die Abschätzung $b_{n+1}-a_{n+1}\le\frac{1}{2}(b_n-a_n)$.)

(b) Zeigen Sie, dass die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren und berechnen Sie deren Grenzwert.

Übungsaufgabe 4.5 (Zusatzaufgabe)**.** Als *Fibonacci-Folge* bezeichnet man die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_0 := 1$, $f_1 := 1$ und $f_{n+1} := f_n + f_{n-1}$ für $n \geq 1$. Es seien außerdem $h < g$ die Lösungen der Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$, wobei wir g als *Goldenen Schnitt* bezeichnen. Zeigen Sie, dass gilt:

(a) $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(g^{n+1} - h^{n+1})$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = g$.