UNIVERSITÄT SALZBURG

25.11.2019
Assoz.-Prof. Dr. Simon Blatt
Fachbereich Mathematik

# Übungen zu Analysis I

## 6. Übungsblatt

**Theorieaufgaben:**

1. Erklären Sie den Begriff der *Reihe* und erläutern Sie das *Majoranten-* sowie *Leibnizkriterium* für Reihen.
2. Erklären Sie den Begriff der *absoluten Konvergenz* sowie das *Wurzel-* und *Quotientenkriterium*.

**Rechen- und Beweisaufgaben:**

**Übungsaufgabe 6.1.** Bestimmen Sie den Wert folgender Reihen:

(a) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^n}{4^{n+2}}$$ (b) $$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k^2-1}$$

**Übungsaufgabe 6.2.** Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$ (b) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n+3^n}$$ (c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

**Übungsaufgabe 6.3** (Alternierende Reihen)**.** Zeigen Sie die Konvergenz der folgenden Reihen:

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2\sqrt{n}}$$ (b) $$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1-n^2}{n^2(1+n)}$$ (c) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \text{ für } x \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung: Die Reihe in (c) heißt *Sinusfunktion* und wird mit $\sin(x)$ bezeichnet.

**Übungsaufgabe 6.4.** Zeigen Sie: Wenn man die Konvergenz oder Divergenz einer Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ mit dem Quotientenkriterium feststellen kann, dann auch mit dem Wurzelkriterium. Beweisen Sie dazu folgende Ungleichungen:

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

**Übungsaufgabe 6.5** (Riemannscher Umordnungssatz, Zusatzaufgabe)**.** Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe mit reellen Summanden. Dann gibt es zu jedem $b \in \mathbb{R}$ eine Umordnung, die gegen $b$ konvergiert.