UNIVERSITÄT SALZBURG

09.12.2019
Assoz.-Prof. Dr. Simon Blatt
Fachbereich Mathematik

Übungen zu Analysis I

8. Übungsblatt

Theorieaufgaben:

1. Was versteht man unter einer *Potenzreihe*. Erklären Sie in diesem Zusammenhang den Begriff des *Konvergenzradius*. Wie kann dieser berechnet werden?
2. Formulieren Sie den *Identitätssatz* für Potenzreihen.

Rechen- und Beweisaufgaben:

Übungsaufgabe 8.1 (Potenzreihen)**.** Bestimmen Sie für folgende Potenzreihen den Konvergenzradius R und untersuchen Sie insbesondere deren Konvergenzverhalten auf dem Rand des Konvergenzkreises $\partial B_R(0) = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| < R\}$.

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} z^n \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

Übungsaufgabe 8.2. Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der folgenden rationalen Funktionen $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ für $x \longrightarrow -\infty$ und $x \longrightarrow \infty$. Lassen sich die Funktionen in $x = 1$ stetig ergänzen?

$$\text{(a) } f(x) = \frac{2-x}{(x-1)^2} \qquad \text{(b) } f(x) = \frac{2-x}{x-1} \qquad \text{(c) } f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \qquad \text{(d) } f(x) = \frac{x^m-1}{x^n-1},$$

wobei $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \neq 0$.

Übungsaufgabe 8.3. (a) Ist die folgende Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x = 0, \\ x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{für } x \neq 0. \end{cases}$$

stetig? Verwenden Sie dazu, dass $\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

(b) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{1, 2\pi + 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{für } x \in (-\infty, 1), \\ \sin(x-1) + 2, & \text{für } x \in (1, 2\pi + 1), \\ x^2 - 1, & \text{für } x \in (2\pi + 1, \infty). \end{cases}$$

Lässt sich die Funkion in $x = 1$ bzw. in $x = 2\pi + 1$ stetig fortsetzen? (Hinweis: Betrachten Sie dazu jeweils den links- bzw. rechtsseitigen Grenzwert)

Übungsaufgabe 8.4. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass f in diesem Fall stets einen Fixpunkt besitzt, das heißt es gibt ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = x_0$.

Übungsaufgabe 8.5. Für eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{C}$ definieren wir die folgende Abstandsfunktion

$$d_A : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit } d_A(z) := \inf\{|z - w| \ ; \ w \in A\}$$

(a) Zeigen Sie, dass d_A Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = 1$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass es für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq \mathbb{C}$ und jedem $z \in \mathbb{C}$ ein $w \in A$ gibt mit $|z - w| = d_A(z)$.

Übungsaufgabe 8.6 (Zusatzaufgabe)**.** Es sei $\{q_1, q_2, q_3, \ldots\}$ eine Abzählung der Menge $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$, weiters $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe mit $a_n > 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und die Funktion $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \sum_{n \ ; \ q_n \leq x} a_n$$

Zeigen Sie, dass f in allen $x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ stetig und in allen Punkten $x \in \mathbb{Q}$ unstetig ist.