UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Wintersemester 2019/20
Dr. Stefan Sturm

Eindimensionale Variationsrechnung - Blatt 01

(Besprechung am 09.10.2019)

Aufgabe 01.
Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ zwei Punkte und $[t_a, t_b] \subset \mathbb{R}$ ein (echtes) Intervall. Des Weiteren sei $\gamma\colon [t_a, t_b] \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbarer Weg im $\mathbb{R}^n$, welcher die Punkte a und b miteinander verbinde und $\gamma(t_a) = a$ sowie $\gamma(t_b) = b$ erfülle. Zeigen Sie, dass die Ungleichung

$$\|b - a\| \leq \int_{t_a}^{t_b} \|\gamma'(t)\| \,\mathrm{d}t$$

erfüllt ist, wobei $\|\,.\,\|$ die euklidische Norm im $\mathbb{R}^n$ bezeichne.

Anmerkung: Anschaulich entspricht $\gamma'(t)$ dem Tangentenvektor an die Kurve $\gamma([t_a, t_b])$ (dem Bild des Weges) im Punkt $\gamma(t)$ für $t \in [t_a, t_b]$. Der Ausdruck auf der rechten Seite der Ungleichung entspricht der Länge der Kurve $\gamma([t_a, t_b])$. Die Ungleichung besagt dann, dass die Länge der Strecke, welche a mit b verbindet, stets kleiner oder gleich der Länge aller a mit b verbindenden stetig differenzierbaren Kurven ist. Im $\mathbb{R}^n$ sind also Strecken die kürzesten Verbindungen zwischen zwei Punkten.

Aufgabe 02.
Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein (echtes) Intervall und bezeichne $\|\,.\,\|$ wiederum die euklidische Norm im $\mathbb{R}^n$. Ein (stetiger) Weg $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt *rektifizierbar*, falls

$$L(\gamma) \coloneqq \sup \left\{ \sum_{i=1}^{m} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \;\middle|\; m \in \mathbb{N},\ a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{m-1} < t_m = b \right\} < \infty.$$

Man bezeichnet dann die Größe $L(\gamma)$ als die *Länge* der Kurve $\gamma([a, b])$.

(a) Machen Sie sich die Definition anhand einer Skizze klar.

(b) Zeigen Sie, dass jeder stetig differenzierbare Weg γ rektifizierbar ist mit Länge

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \,\mathrm{d}t.$$

(c) Zeigen Sie, dass der Weg $\gamma\colon \left[0, \frac{2}{\pi}\right] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\gamma\colon t \mapsto \begin{cases} t \sin\left(\frac{1}{t}\right) & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{für } t = 0, \end{cases}$$

zwar stetig, jedoch nicht rektifizierbar ist.

Hinweis: Wählen Sie zu festem $m \in \mathbb{N}$ eine geschickte Partition des Intervalls $\left[0, \frac{2}{\pi}\right]$ und schätzen Sie die entstehende Summe nach unten durch einen bei $m \to \infty$ divergenten Ausdruck ab.