UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Wintersemester 2019/20
Dr. Stefan Sturm

Eindimensionale Variationsrechnung - Blatt 02
(Besprechung am 16.10.2019)

Aufgabe 03.
In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass es sich bei $PC^1([0,1])$ mit zugehöriger Norm

$$\begin{aligned}\|u\|_{PC^1([0,1])} &:= \|u\|_{C^0([0,1])} + \max_{i=1,\dots,m} \|u'\|_{C^0([t_{i-1},t_i])} \\ &:= \max_{t\in[0,1]} |u(t)| + \max_{i=1,\dots,m} \left(\max_{t\in[t_{i-1},t_i]} |u'(t)| \right)\end{aligned}$$

nicht um einen Banachraum handelt. Für die Definition von $PC^1([0,1])$ sei hierbei auf das Präsenzblatt verwiesen.

(a) Skizzieren Sie hierzu zunächst die folgende Funktion $u\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, definiert via

$$u(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t = 0, \\ \dfrac{k(k+1)}{k^3}\left(t - \dfrac{1}{k+1}\right) & \text{für } t \in \left(\dfrac{1}{k+1}, \dfrac{1}{k}\right), \\ \dfrac{1}{k^3} - \dfrac{(k-1)k}{k^3}\left(t - \dfrac{1}{k}\right) & \text{für } t \in \left[\dfrac{1}{k}, \dfrac{1}{k-1}\right], \end{cases}$$

für $k \in 2\mathbb{N}$ und begründen Sie anhand der Skizze, dass $u \in C^0([0,1])$, aber $u \notin PC^1([0,1])$.

(b) Wir definieren nun für $n \in \mathbb{N}$ Funktionen $u_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$u_n(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t \in \left[0, \dfrac{1}{2n+1}\right), \\ u(t) & \text{für } t \in \left[\dfrac{1}{2n+1}, 1\right]. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $PC^1([0,1])$ bezüglich der Norm $\|\,.\,\|_{PC^1([0,1])}$ ist, es jedoch keine Funktion $u_0 \in PC^1([0,1])$ gibt, die Grenzwert dieser Folge ist.

Aufgabe 04.
Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f\colon [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Lagrangefunktion. Zeigen Sie, dass dann das Funktional $\mathcal{F}\colon PC^1([a,b]) \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}[u] := \int_a^b f\big(x, u(x), u'(x)\big)\,\mathrm{d}x := \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} f\big(x, u(x), u'(x)\big)\,\mathrm{d}x,$$

ebenfalls stetig ist.