UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Wintersemester 2019/20
Dr. Stefan Sturm

Eindimensionale Variationsrechnung - Blatt 07
(Besprechung am 20.11.2019)

Aufgabe 13.
Wir betrachten das Funktional $\mathcal{F}\colon PC^1([0,1]) \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$\mathcal{F}[u] := \int_0^1 (u'(x))^2 + (u'(x))^3 \,\mathrm{d}x.$$

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Die Funktion $u \equiv 0$ ist ein lokaler $\mathcal{F}$-Minimierer auf

$$D := \{v \in PC^1([0,1])\colon v(0) = 0, v(1) = 0\}.$$

(b) Die Funktion $u \equiv 0$ ist jedoch kein starker lokaler $\mathcal{F}$-Minimierer auf D.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für $n \in \mathbb{N}$ und $c \in (0,1)$ jede Funktion $u_{n,c}$ der Form

$$u_{n,c}(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{nc}\, x & \text{für } x \in [0,c], \\ \dfrac{1}{n(1-c)} - \dfrac{1}{n(1-c)}\, x & \text{für } x \in (c,1], \end{cases}$$

in D liegt. Beweisen Sie außerdem, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $c_n \in (0,1)$ gibt, sodass $\mathcal{F}[u_{n,c_n}] < 0$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $\|u_{n,c_n}\|_{C^0([0,1])} < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

Aufgabe 14.
Stellen Sie für alle Funktionale aus Aufgabe 09 die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen auf.