UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Wintersemester 2019/20
Dr. Stefan Sturm

Eindimensionale Variationsrechnung - Blatt 08
(Besprechung am 27.11.2019)

Aufgabe 15.

(a) Zu $i \in \{1,2,3,4\}$ seien jeweils Funktionale $\mathcal{F}_i \colon D_i \to \mathbb{R}$ der Form

$$\mathcal{F}_i[u] \coloneqq \int_{a_i}^{b_i} f_i(x, u(x), u'(x))\,\mathrm{d}x$$

auf Mengen $D_i \coloneqq \{u \in C^1([a_i, b_i]) \colon u(a_i) = A_i, u(b_i) = B_i\}$ für $a_i, b_i, A_i, B_i \in \mathbb{R}$ definiert, welche im Folgenden genauer spezifiziert werden. Stellen Sie jeweils die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung auf und lösen Sie diese.

(i) $a_1 = 0, A_1 = 0, b_1 = 1, B_1 = 1, f_1(x, u(x), u'(x)) = u'(x)^2 + 2u(x)$;

(ii) $a_2 = -1, A_2 = 1, b_2 = 2, B_2 = 0, f_2(x, u(x), u'(x)) = u'(x)^2 + 2u(x)u'(x)$;

(iii) $a_3 = 0, A_3 = 0, b_3 = 1, B_3 = 0, f_3(x, u(x), u'(x)) = u'(x)^2 + 2xu'(x) + x^2$;

(iv) $a_4 = 0, A_4 = 1, b_4 = 2, B_4 = 1, f_4(x, u(x), u'(x)) = u'(x)^2 + 2u(x)u'(x) + u(x)^2$.

Hinweis: Sie können zum besseren Lösen der Euler-Lagrange-Gleichungen zunächst annehmen, dass u zweimal stetig differenzierbar auf $[a_i, b_i]$ ist.

(b) Diskutieren Sie für jedes Funktional $\mathcal{F}_i$, ob die Lösungen der zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichung lokale oder globale Extremale unter allen Funktionen $u \in D_i$ sind.

(c) Wir betrachten außerdem das Funktional $\mathcal{F} \colon PC^1([0,1]) \supset D \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\mathcal{F}[u] \coloneqq \int_0^1 u(x)^3 + (u'(x))^3\,\mathrm{d}x,$$

mit $D \coloneqq \{v \in PC^1([0,1]) \colon v(0) = 0, v(1) = 0\}$. Verifizieren Sie, dass $u \equiv 0$ eine Lösung der zugehörigen (stückweise definierten) Euler-Lagrange-Gleichung ist und zeigen Sie, dass es sich hierbei weder um einen $\mathcal{F}$-Minimierer noch um einen $\mathcal{F}$-Maximierer handelt.

Hinweis: Betrachten Sie zu $n \in \mathbb{N}$ Funktionen $v_n^\pm \in D$ der Form

$$v_n^\pm(x) \coloneqq \begin{cases} \pm nx & \text{für } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right], \\ \mp \frac{n}{n-1}(x-1) & \text{für } x \in \left(\frac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

Aufgabe 16.

Wir betrachten ein Funktional $\mathcal{F} \colon PC^1([a,b]) \to \mathbb{R}$ der Form

$$\mathcal{F}[u] \coloneqq \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\,\mathrm{d}x$$

mit einer bezüglich x, u und ξ zweifach stetig differenzierbaren Lagrange-Funktion f. Weiterhin erfülle ein $u \in PC^1([a,b]) \cap C^1([\alpha,\beta])$ mit $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_\xi(.,u,u') = f_u(.,u,u')$$

auf $[\alpha,\beta]$. Zeigen Sie folgende Aussage: Gilt $f_{\xi\xi}(x_0,u(x_0),u'(x_0)) \neq 0$ für $x_0 \in (\alpha,\beta)$, so ist u in einer Umgebung von x_0 in (α,β) zweimal stetig nach x differenzierbar.

Hinweis: Wenden Sie den Satz über implizite Funktionen an.