UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Wintersemester 2019/20
Dr. Stefan Sturm

Eindimensionale Variationsrechnung - Blatt 10
(Besprechung am 11.12.2019)

Aufgabe 19. Sei $u\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ ein geschlossener, (stückweise) stetig differenzierbarer Jordan-Weg[1] der Länge

$$L[u] = \int_0^{2\pi} \|u'(t)\| \,\mathrm{d}t$$

mit Euklidischer Norm $\| \,.\, \|$, dessen Bild $u([0,2\pi])$ eine geschlossene Jordan-Kurve[1] in der Ebene darstelle. Wir bezeichnen im Folgenden mit $|F[u]|$ den Flächeninhalt des von der Kurve eingeschlossenen beschränkten[2] Gebietes. Das *Isoperimetrische Problem* in der Ebene stellt nun die Frage nach solchen geschlossenen Wegen u vorgegebener Länge $L[u]$, deren Kurven $u([0,2\pi])$ den größten Flächeninhalt $|F[u]|$ des eingeschlossenen Gebietes produzieren. Dieses Problem lässt sich zum Beispiel durch Herleitung der folgenden sogenannten *Isoperimetrischen Ungleichung* lösen:

$$(*) \qquad |F[u]| \leq \frac{1}{4\pi} L[u]^2.$$

Im Folgenden wollen wir nun $(*)$ herleiten. Dazu können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $\|u'(t)\| = L[u]/(2\pi)$ für alle $t \in [0,2\pi]$ und $\int_0^{2\pi} u(t)\,\mathrm{d}t = 0 \in \mathbb{R}^2$ gelten. Man kann zeigen, dass sich dann für den orientierten[3] Flächeninhalt $F[u]$ des eingeschlossenen Gebietes der folgende Ausdruck ergibt

$$F[u] = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} u_1(t)u_2'(t) - u_1'(t)u_2(t)\,\mathrm{d}t,$$

wobei $u(t) = (u_1(t), u_2(t)) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Zeigen Sie, dass die Isoperimetrische Ungleichung aus der *Wirtinger-Ungleichung* folgt:

$$\int_0^{2\pi} \|u(t)\|^2 \,\mathrm{d}t \leq \int_0^{2\pi} \|u'(t)\|^2 \,\mathrm{d}t.$$

Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis, dass $|u_1(t)u_2'(t) - u_1'(t)u_2(t)| \leq \frac{1}{2}\|u(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|u'(t)\|^2$.

Wir identifizieren nun $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ und betrachten $u\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ als stetige und (stückweise) stetig differenzierbare $\mathbb{C}$-wertige Funktion mit $u(0) = u(2\pi)$.[4] Da $u \in L^2([0,2\pi];\mathbb{C})$, hat u eine *komplexe Fourier-Darstellung* der Form

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt},$$

[1] Jordan-Wege werden auch *einfache Wege* genannt und sind injektiv auf dem halboffenen Intervall $[0,2\pi)$. Ihre Bilder $u([0,2\pi])$ werden dann als *Jordan-Kurven* bezeichnet.
[2] Dass ein von Jordan-Kurven eingeschlossenes, beschränktes Gebiet existiert, ist keinesfalls eine Trivialität, sondern Aussage eines bedeutenden Satzes, nämlich des sogenannten *Jordan'schen Kurvensatzes.*
[3] Beachte, dass der Wert $F[u]$ auch negativ werden kann, wobei im Vorzeichen die *Orientierung* kodiert wird.
[4] Solche Funktionen kann man sich auch als 2π-periodisch fortgesetzte $\mathbb{C}$-wertige Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ vorstellen.

wobei hier die *Fourier-Koeffizienten* $c_k \in \mathbb{C}$ wie folgt definiert seien:

$$c_k := \int_0^{2\pi} u(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t.$$

(b) Zeigen Sie durch gliedweise Integration der Fourier-Reihe von u, dass die Bedingung $\int_0^{2\pi} u(t)\,\mathrm{d}t = 0$ impliziert, dass $c_0 = 0$ gilt.

(c) Wir definieren nun zu $n \in \mathbb{N}$ die n-te Partialsumme u_n der Fourier-Reihe von u als

$$u_n(t) := \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}.$$

Zeigen Sie die Wirtinger-Ungleichung für u_n unter Benutzung von (b).

Da ebenso $u' \in L^2([0, 2\pi]; \mathbb{C})$, ist auch diese Funktion durch eine komplexe Fourier-Reihe der Form

$$u'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c'_k e^{ikt}$$

mit Fourier-Koeffizienten $c'_k \in \mathbb{C}$ darstellbar.

(d) Berechnen Sie die Fourier-Reihe der Ableitung u' explizit durch gliedweise Differentiation der Fourierreihe von u und drücken Sie dabei insbesondere c'_k durch c_k aus.

(e) Nutzen Sie nun ohne Beweis die L^2-Konvergenz von $u_n \to u$ und $u'_n \to u'$ sowie (c), um die Wirtinger-Ungleichung für u selbst zu zeigen.

(f) Wann tritt in der Wirtinger-Ungleichung bzw. in der Isoperimetrischen Ungleichung Gleichheit ein? Beweisen Sie Ihre Aussagen.