UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Wintersemester 2019/20
Dr. Stefan Sturm

Eindimensionale Variationsrechnung - Blatt 11
(Besprechung am 18.12.2019)

Aufgabe 20. In dieser Aufgabe wollen wir dadurch einen Ausblick auf die *mehrdimensionale Variationsrechnung* geben, dass wir die Euler-Lagrange-Gleichung im mehrdimensionalen Setting herleiten und ein paar Beispiele dazu konkret berechnen. Die Methode der Herleitung wird genau die gleiche sein wie im Eindimensionalen, nur entstehen im Mehrdimensionalen nun *partielle Differentialgleichungen*. Diese stellen eine Verallgemeinerung von gewöhnlichen Differentialgleichungen auf Funktionen mehrerer Veränderlicher dar.

Im Folgenden bezeichne für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ die Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Der Einfachheit halber betrachten wir hier eine Lagrange-Funktion $f \in C^2(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ und Funktionen $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$. Damit definieren wir ein Funktional $\mathcal{F} \colon C^2(\Omega; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ durch

$$\mathcal{F}[u] := \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x)) \,\mathrm{d}x.$$

(a) Berechnen Sie unter Rechtfertigung der Vertauschungen von Ableitung und Integral die erste Variation

$$\delta\mathcal{F}(u; \varphi) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \mathcal{F}[u + \varepsilon\varphi]$$

für $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ und zeigen Sie, dass

$$\delta\mathcal{F}(u; \varphi) = 0 \implies \operatorname{div}_x\big(f_\xi(x, u(x), \nabla u(x))\big) = f_u(x, u(x), \nabla u(x)) \quad \forall x \in \Omega,$$

wobei $f \equiv f(x, u, \xi)$ und div_x die Divergenz bezüglich des Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ notiere.

Hinweis: Sie dürfen hierzu ohne Beweis verwenden, dass das Fundamentallemma aus der Vorlesung auch in folgender mehrdimensionaler Variante gilt:

Fundamentallemma der Variationsrechnung - Version für stetige Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $u \in C^0(\Omega)$. Gilt dann

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x) \,\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

so ist $u(x) = 0$ für alle $x \in \Omega$.

(b) Berechnen Sie für die folgenden Lagrange-Funktionen $f_i \colon \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $i \in \{1, 2\}$ die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung ($\|\,.\,\|$ bezeichnet die euklidische Norm im $\mathbb{R}^n$):

- **(i)** $f_1(x, u, \xi) = \frac{1}{p}\|\xi\|^p + h(x)u$ mit $p \in (1, \infty)$ und gegebenem $h \in C^2(\Omega)$;
- **(ii)** $f_2(x, u, \xi) = \sqrt{1 + \|\xi\|^2}$.

Aufgabe 21. Wie wir in der vorherigen Aufgabe gesehen haben ist man in der mehrdimensionalen Variationsrechnung im Allgemeinen mit partiellen Differentialgleichungen konfrontiert, wenn man das Minimierungsproblem über die Euler-Lagrange-Gleichung lösen möchte. Manchmal lässt sich so eine partielle Differentialgleichung mit einem sogenannten *Separationsansatz* (auch *Trennung* *der Variablen* genannt) in zwei (oder mehr) entkoppelte gewöhnliche Differentialgleichungen überführen, die man dann einzeln leichter lösen kann.

Führen Sie für die nachfolgenden $\mathbb{R}$-wertigen Beispiele im $\mathbb{R}^2$ jeweils einen Separationsansatz der Form $u(a,b) = g(a)h(b)$ durch und berechnen Sie so die zugehörigen Familien von Lösungen der partiellen Differentialgleichungen. Sie dürfen hierbei annehmen, dass alle beteiligten Funktionen hinreichend regulär sind, sodass sie alle Ableitungen im klassischen Sinn bilden dürfen.

(i) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ für $x \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$;

(ii) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ für $x \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$;

(iii) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$ für $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Hinweis: Um die gewöhnliche Differentialgleichung für r zu lösen, können Sie einen Ansatz der Form $g(r) = r^\gamma$ mit $\gamma \in \mathbb{R}$ versuchen.

Hinweis zur gesamten Aufgabe: Falls Sie Schwierigkeiten beim Entkoppeln der Differentialgleichungen haben sollten, trennen Sie Terme mit verschiedenen Variablen voneinander, indem Sie sie auf verschiedene Seiten der Gleichung bringen und überlegen Sie sich dann, wann eine solche Gleichheit nur gelten kann.