

Eindimensionale Variationsrechnung - Blatt 13

(Besprechung am 15.01.2020)

Aufgabe 24. Eine *Riemann'sche Metrik*¹ g auf $\mathbb{R}^N$ kann als eine (stetig differenzierbare) Abbildung

$$g: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}_{\text{spd}}^{N \times N}$$

in die Menge aller reellen, symmetrischen und positiv definiten $N \times N$ - Matrizen $\mathbb{R}_{\text{spd}}^{N \times N}$ aufgefasst werden.² Notieren wir für festes $p \in \mathbb{R}^N$ die Matrix

$$g(p) = (g_{ij}(p))_{1 \leq i, j \leq N},$$

so definieren wir für einen C^1 -Weg $\gamma: \mathbb{R} \supset [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ mit $a < b$ die *Riemann'sche Norm* $\|\cdot\|_R$ des Tangentialvektors $\gamma'(t)$ (auch als *Riemann'sche Geschwindigkeit* bezeichnet) als

$$\|\gamma'(t)\|_R := \left(\sum_{i,j=1}^N g_{ij}(\gamma(t)) \gamma'_i(t) \gamma'_j(t) \right)^{1/2}.$$

Des Weiteren definieren wir das *Riemann'sche Längenfunktional* $L: C^1([a, b]; \mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ sowie das *Riemann'sche Energiefunktional* $E: C^1([a, b]; \mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$L[\gamma] := \int_a^b \|\gamma'(t)\|_R dt \quad \text{bzw.} \quad E[\gamma] := \int_a^b \|\gamma'(t)\|_R^2 dt.$$

Zeigen Sie folgende Aussagen:

- (a) Das Längenfunktional ist parametrisierungsinvariant, d.h. für jede stetig differenzierbare und streng monotone Funktion $\psi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ gilt

$$L[\gamma \circ \psi] = L[\gamma].$$

- (b) Für jedes $\gamma \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^N)$ gilt

$$E[\gamma] \geq \frac{L[\gamma]^2}{b-a}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $\|\gamma'(t)\|_R$ konstant auf $[a, b]$ ist.

Im Fall der Gleichheit in der letzten Ungleichung spricht man auch davon, dass γ mit *konstanter Riemann'scher Geschwindigkeit* oder *proportional zur Riemann'schen Bogenlänge parametrisiert* ist, da dies äquivalent zu

$$L[\gamma|_{[t_1, t_2]}] = c(t_2 - t_1)$$

¹Achtung: Hierbei handelt es sich nicht um eine Metrik im Sinne von metrischen Räumen.

²Diese Matrizen können als darstellende Matrizen verschiedener Skalarprodukte auf dem $\mathbb{R}^N$ gesehen werden.

für alle $a \leq t_1 \leq t_2 \leq b$ und einer Konstanten $c \geq 0$ ist. Handelt es sich bei γ um einen *regulären* Weg, d.h. γ' hat keine Nullstellen auf $[a, b]$, so kann man stets proportional zur Bogenlänge umparametrisieren, indem man die *Bogenlängenfunktion* $\sigma_\gamma: [a, b] \rightarrow [0, L[\gamma]]$, definiert via

$$\sigma_\gamma(t) := L[\gamma|_{[a,t]}],$$

eingführt und zur Umparametrisierung $\hat{\gamma} := \gamma \circ \sigma_\gamma^{-1}$ übergeht.

- (c) Zeigen Sie, dass $\hat{\gamma}$ stetig differenzierbar auf $[0, L[\gamma]]$ mit $\|\hat{\gamma}'(t)\|_R = 1$ für alle $t \in [0, L[\gamma]]$ ist und die Umparametrisierungen von γ proportional zur Bogenlänge genau diejenigen Wege der Form $t \mapsto \hat{\gamma}(ct + d)$ mit $c, d \in \mathbb{R}$ sind.

Aufgabe 25. Sei nun $Z \subseteq C^1([a, b]; \mathbb{R}^N)$ eine Menge regulärer C^1 -Wege, die mit einem Weg γ auch alle Umparametrisierungen $\gamma \circ \psi$ dieses Weges durch streng monotone und C^1 -umkehrbare $\psi: [a, b] \rightarrow [a, b]$ enthält.

- (a) Beweisen Sie mithilfe der Ergebnisse aus Aufgabe 24, dass jeder E -minimierende Weg γ_* in Z proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist.

HINWEIS: Stellen Sie eine geeignete Ungleichungskette mit $E[\hat{\gamma}_*]$ und $E[\gamma_*]$ auf.

- (b) Stellen Sie folgenden Zusammenhang zwischen L -Minimierern und E -Minimierern auf Z her: Die L -minimierenden Wege in Z sind genau die Umparametrisierungen von E -minimierenden Wegen durch streng monotone und C^1 -umkehrbare Parametertransformationen ψ .

Lässt man nun auch nicht-reguläre Kurven zu, so stößt man auf Probleme. Um sich ein Bild hiervon zu machen, zeigen Sie:

- (c) Das Variationsproblem

$$\min_{\gamma \in Z'} \left\{ \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt \right\}$$

mit der euklidischen Norm $\|\cdot\|$ und der Menge

$$Z' := \left\{ \gamma \in C^1([0, 1]; \mathbb{R}^2) : \gamma(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \gamma(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \gamma(t) \notin \{0\} \times (-\infty, 1) \text{ für } t \in [0, 1] \right\}$$

hat eine Lösung, aber $\int_0^1 \|\gamma'(t)\|^2 dt$ nimmt sein Infimum auf Z' nicht an.³

HINWEIS: Sie können sich die Lösung des obigen Variationsproblems am besten zunächst graphisch überlegen. Versuchen Sie dann, den Weg, der die gezeichnete Kurve beschreibt, als C^1 -Weg zu parametrisieren und die gewünschten Ergebnisse mittels dieser Darstellung zu zeigen. Falls Sie scheitern sollten, können Sie den Weg $\gamma(t) = ((2t - 1)^3, 1 - |2t - 1|^3)$ versuchen und sich überlegen, wie man auf diese Parametrisierung kommen könnte.

³Diese Schwierigkeiten lassen sich beheben, indem man zu *absolutstetigen* Wegen übergeht.