UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Univ.-Prof. Dr. Verena Bögelein
Ao. Univ.-Prof. Dr. Reinhard Wolf
Sommersemester 2019

01. Blatt zur Übung Funktionalanalysis (Teil Bögelein)

(Besprechung am 15.05.2019)

Aufgabe 01.
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $f, g\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbare Funktionen. Desweiteren seien $p, q \in [1, \infty]$ mit

$$(*) \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

wobei die Konvention $\frac{1}{\infty} := 0$ vereinbart wird. Zeigen Sie, dass die *Hölder-Ungleichung* gilt:

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \le \|f\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Hinweis. Zeigen Sie für den Fall $p, q \in (1, \infty)$ für $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ zunächst die folgende Version der *Youngschen Ungleichung*

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

indem Sie den Term auf der linken Seite geeignet umschreiben und die Konvexität der Exponentialfunktion $x \mapsto e^x$ ausnutzen. Wenden Sie dann für $x \in \Omega$ die Young-Ungleichung auf

$$a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \quad \text{und} \quad b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$$

an und folgern Sie daraus die Gültigkeit der Hölder-Ungleichung.

Anmerkung. Gilt Bedingung $(*)$, so sagt man auch, dass die Exponenten p und q *Hölder-konjugiert* zueinander sind. In der Literatur schreibt man auch häufig p' anstatt q.

Aufgabe 02.
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f, g\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar und $p \in [1, \infty]$. Zeigen Sie, dass die *Minkowski-Ungleichung* erfüllt ist:

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \le \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Hinweis. Spalten Sie im Fall $p \in (1, \infty)$ den Term $|f + g|^p$ multiplikativ auf in $|f + g| \cdot |f + g|^{p-1}$ und wenden Sie die Dreiecksungleichung an, um den Term weiter additiv aufzuspalten. Wenden Sie anschließend auf jeden Summanden einzeln die Hölder-Ungleichung mit Exponenten p und q an und folgern Sie aus der entstehenden Ungleichung schließlich die Minkowski-Ungleichung.

Aufgabe 03.

(i) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{L}^n(\Omega) < \infty$, wobei $\mathcal{L}^n$ das n-dimensionale Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ bezeichne. Zeigen Sie, dass für $1 \le p < q \le \infty$ folgende Inklusion gilt:

$$L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega).$$

(ii) Bleibt obige Inklusion richtig, falls $\mathcal{L}^n(\Omega) = \infty$? Beweisen Sie die Aussage oder finden Sie ein geeignetes Gegenbeispiel.

Aufgabe 04.
Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl und $p \in [1, \infty]$. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} f_\alpha \colon \mathbb{R}^n \supset \Omega &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto |x|^\alpha, \end{aligned}$$

wobei $|\cdot|$ hier die euklidische Norm im $\mathbb{R}^n$ notiere. Für welche α gilt $f_\alpha \in L^p(\Omega)$, wenn

(i) $\Omega = B_1(0) \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon 0 < |x| < 1\}$?

(ii) $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon 1 \leq |x|\}$?

Hinweis. Verwenden Sie Kugelkoordinaten.

Aufgabe 05.
Sei $(X, \|\cdot\|^*)$ ein halbnormierter Raum. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(i) $N \coloneqq \{x \in X \colon \|x\|^* = 0\}$ ist ein Unterraum von X.

(ii) $\big\|[x]\big\| \coloneqq \|x\|^*$ definiert eine Norm auf dem Quotientenraum X/N.

(iii) Ist $(X, \|\cdot\|^*)$ vollständig, so ist $(X/N, \|\cdot\|)$ ein Banachraum.