Fachbereich Mathematik
Sommersemester 2020
Univ.-Prof. Dr. Verena Bögelein
Dr. Stefan Sturm

Funktionalanalysis - Blatt 01
(Besprechung am 13.03.20)

Aufgabe 01.1.

(a) Sei X eine Menge mit $|X| = 2$, etwa $\{0, 1\}$. Zeigen Sie, dass das Mengensystem

$$\mathcal{T} := \{\emptyset, \{0\}, X\}$$

eine Topologie auf X definiert. Das Paar $(X, \mathcal{T})$ heißt *Sierpinski-Raum.*

(b) Wir betrachten auf $\mathbb{R}$ die folgenden drei Mengensysteme:

$$\mathcal{T} := \left\{ \bigcup_{i\in I} (a_i, b_i) \colon a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i < b_i \text{ für alle } i \in I, I \text{ beliebige Indexmenge} \right\} \cup \left\{ \emptyset \right\},$$

$$\mathcal{T}' := \left\{ (-\infty, b) \colon b \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \emptyset, \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathcal{T}'' := \left\{ \bigcup_{i\in I} (-\infty, b_i] \colon b_i \in \mathbb{R} \text{ für alle } i \in I, I \text{ beliebige Indexmenge} \right\} \cup \left\{ \emptyset \right\}.$$

Zeigen Sie, dass es sich hierbei jeweils um Topologien auf $\mathbb{R}$ handelt.

(c) Überlegen Sie sich, welche Mengeninklusionen zwischen den Topologien $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$ und $\mathcal{T}''$ gelten bzw. nicht gelten. Welche der drei Topologien ist gleich $\mathcal{T}_{\text{kan}}$ auf $\mathbb{R}$?

Aufgabe 01.2. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und

$$\mathcal{A} := \{A \subseteq X \colon A \text{ ist abgeschlossen bezüglich } \mathcal{T}\}$$

das Mengensystem seiner abgeschlossenen Teilmengen. Beweisen Sie folgende Eigenschaften dieses Systems:

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$ und $X \in \mathcal{A}$.

(ii) $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$, wobei $n \in \mathbb{N}$.

(iii) $A_i \in \mathcal{A}$ für alle $i \in I \implies \bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$, wobei I eine beliebige Indexmenge ist.

Aufgabe 01.3.

(a) Sei X eine unendliche Menge, also $|X| = \infty$. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{T}_{\text{kof}} := \left\{ X \setminus E \colon E \subset X, E \text{ endlich} \right\} \cup \left\{ \emptyset \right\}$$

eine Topologie auf X ist. Sie heißt die *kofinite Topologie.*

(b) Betrachten Sie nun die beiden topologischen Räume $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{kan}})$ und $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{kof}})$. Bestimmen Sie jeweils den offenen Kern $\mathring{M}$ bzw. die abgeschlossene Hülle $\bar{M}$ der folgenden Mengen M bezüglich beider Topologien:

(i) $M = [a, b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$,

(ii) $M = \mathbb{Z}$,

(iii) $M = \mathbb{Q}$.

Aufgabe 01.4. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $u \in L^1_{\text{lok}}(\Omega)$ hat eine Funktion $v \in L^1_{\text{lok}}(\Omega)$ als *schwache partielle Ableitung* nach x_i, falls für alle $\varphi \in C^\infty_{\text{kpt}}(\Omega)$ gilt:

$$\int_\Omega u(x)\partial_i\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega v(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Betragsfunktion $|\,.\,|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$x \mapsto |x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0, \\ -x & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

schwach differenzierbar ist und bestimmen Sie ihre schwache Ableitung.

(b) Zeigen Sie, dass die Signumsfunktion $\operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$x \mapsto \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ -1 & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

nicht schwach differenzierbar ist.

(c) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Ferner sei $u \in C^0(\mathbb{R}^n)$ eine Funktion, welche auf $\mathbb{R}^n \setminus \partial G$ im klassischen Sinn differenzierbar ist mit lokal integrierbaren partiellen Ableitungen $\partial_i u \in L^1_{\text{lok}}(\mathbb{R}^n)$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$. Zeigen Sie, dass u dann auf ganz $\mathbb{R}^n$ schwache partielle Ableitungen besitzt.

Hinweis: Verwenden Sie den *Integralsatz von Gauß* beziehungsweise *partielle Integration im Mehrdimensionalen.*

(d) Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ wie zuvor. Zeigen Sie, dass die Indikatorfunktion $\mathbb{1}_G\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ von G mit

$$x \mapsto \mathbb{1}_G(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in G, \\ 0 & \text{für } x \notin G, \end{cases}$$

keine schwachen Ableitungen auf $\mathbb{R}^n$ besitzt.

Hinweis: Auch hier ist der *Gauß'sche Integralsatz* beziehungsweise *partielle Integration* nützlich.