Fachbereich Mathematik
Univ.-Prof. Dr. Verena Bögelein
Ao. Univ.-Prof. Dr. Reinhard Wolf
Sommersemester 2019

03. Blatt zur Übung Funktionalanalysis (Teil Bögelein)
(Besprechung am 29.05.2019)

Aufgabe 09.
Diese Aufgabe soll dazu dienen, die Transformationsformel – bekannt aus der Vorlesung zur Maß- und Integrationstheorie – zu wiederholen. Dazu formulieren wir zunächst den Satz selbst:

Satz (Transformationsformel). Sei $F\colon \mathbb{R}^n \supset O \to F(O) \subset \mathbb{R}^n$ ein C^1-Diffeomorphismus zwischen offenen Mengen O und $F(O)$ des $\mathbb{R}^n$. Dann gelten folgende Aussagen:

(i) $A \subset O$ ist $\mathcal{L}^n$-messbar $\iff$ $F(A) \subset F(O)$ ist $\mathcal{L}^n$-messbar und es gilt

$$\mathcal{L}^n(F(A)) = \int_A \big|\det\big(DF(x)\big)\big| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n(x).$$

(ii) $g\colon F(A) \to \overline{\mathbb{R}}$ ist $\mathcal{L}^n$-messbar $\iff$ $g \circ F\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ ist $\mathcal{L}^n$-messbar und es gilt:

$$\int_{F(A)} g(x)\, \mathrm{d}\mathcal{L}^n(x) = \int_A (g\circ F)(x) \cdot \big|\det\big(DF(x)\big)\big| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n(x).$$

Berechnen Sie nun mithilfe der Transformationsformel folgende Integrale bzw. Maße von Mengen, indem Sie die angegebenen Diffeomorphismen nutzen:

(a) $\mathcal{L}^3(B_r(0))$ mit $B_r(0) = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 \le r^2\big\}$ mithilfe von

$$F(\varrho,\vartheta,\varphi) = (\varrho\sin(\vartheta)\cos(\varphi), \varrho\sin(\vartheta)\sin(\varphi), \varrho\cos(\vartheta));$$

(b) $\mathcal{L}^3(M)$ mit $M = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 1 \le x^2+y^2 \le 4, 0 \le y \le \sqrt{3}x, 0 \le z \le 2\big\}$ mithilfe von

$$F(r,\varphi,z) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z);$$

(c) $\displaystyle\int_N e^{-(x^2+y^2)} \frac{xy}{x^2+y^2}\, \mathrm{d}\mathcal{L}^2(x,y)$ mit $N = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 \le 4, x,y \ge 0\big\}$ mithilfe von

$$F(r,\varphi) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)).$$

Aufgabe 10.
Diese Aufgabe befasst sich mit der Reflexivität der Räume $L^p(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dazu ist es zuerst notwendig, sich mit den Dualräumen von $L^p(\Omega)$ zu befassen.

(a) Beweisen Sie zunächst, dass zu gegebenem $g \in L^q(\Omega)$ und $p \in [1,\infty]$ das folgendermaßen definierte Funktional $I_g\colon L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$(*) \qquad f \mapsto I_g(f) := \int_\Omega fg \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n,$$

ein Element des Dualraums $L^p(\Omega)'$ ist, wobei q den Hölder-konjugierten Exponenten zu p bezeichne.

Der Beweis, dass jedes Element $\Phi \in L^p(\Omega)'$ für $p \in [1, \infty)$ von der Form in $(*)$ ist, ist schwieriger. Sie dürfen daher folgenden Satz ohne Beweis verwenden:

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{L}^n$ das n-dimensionale Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^n$. Dann gilt für $p \in [1, \infty)$ die folgende Aussage: Zu $\Phi \in L^p(\Omega)'$ gibt es stets ein $g \in L^q(\Omega)$, sodass $\Phi = I_g$ ist, wobei q der Hölder-konjugierte Exponent zu p und I_g wie in $(*)$ definiert sei.

(b) Zeigen Sie nun, dass die Abbildung $I\colon L^q(\Omega) \to L^p(\Omega)'$, $g \mapsto I_g$ für $p \in (1, \infty)$ ein normerhaltender Isomorphismus ist.

Hinweis: Betrachten Sie zum Beispiel die Funktion

$$f = \frac{g|g|^{q-2}}{\|g\|_q^{q-1}} = \frac{g|g|^{q/p-1}}{\|g\|_q^{q/p}}$$

und zeigen Sie damit, dass $\|I_g\| = \|g\|_q$ gilt, um die Normerhaltung nachzuweisen.

Anmerkung: Die Behauptung in (b) gilt auch für den Fall $p = 1$, jedoch nicht für den Fall $p = \infty$, da man zeigen kann, dass $L^1(\Omega) \subsetneq L^\infty(\Omega)'$.

(c) Zeigen Sie, dass $L^p(\Omega)$ für $p \in (1, \infty)$ reflexiv ist.

Anmerkung: $L^1(\Omega)$ und $L^\infty(\Omega)$ sind nicht reflexiv; vergleiche hierzu auch Teil (d).

(d) Zeigen Sie allgemein, dass ein Banachraum X genau dann reflexiv ist, wenn sein Dualraum X' reflexiv ist.

Hinweis: Benutzen Sie für die Richtung „X' reflexiv $\implies$ X reflexiv“, dass abgeschlossene Unterräume reflexiver Räume wieder reflexiv sind und beweisen Sie, dass für einen Isomorphismus $T\colon X \to Y$ zwischen zwei Banachräumen gilt:

$$X \text{ ist reflexiv} \iff Y \text{ ist reflexiv.}$$

Aufgabe 11.
Beweisen Sie den folgenden Satz:

Satz (Konstanzsatz). Existieren für $u \in L^1_{\mathrm{lok}}(\Omega)$ mit $i \in \{1, \ldots, n\}$ die schwachen Ableitungen $D_i u = 0$ auf dem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, so ist u konstant.

Hinweis: Benutzen Sie ein Glättungsargument.