Fachbereich Mathematik
Sommersemester 2020
Univ.-Prof. Dr. Verena Bögelein
Dr. Stefan Sturm

Funktionalanalysis - Blatt 03
(Besprechung am 27.03.20)

Aufgabe 03.1. Für $p \in [1, \infty)$ und $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ bezeichnen wir im Folgenden mit

$$\ell^p := \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \colon \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty\} \quad \text{bzw.}$$
$$\ell^\infty := \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \colon (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ ist beschränkt}\}$$

die Menge der *p-summierbaren Folgen* bzw. den (bereits aus der Vorlesung bekannten) $\mathbb{K}$-Vektorraum der *beschränkten Folgen*. Des Weiteren definieren wir Abbildungen $\|\,.\,\|_p \colon \ell^p \to \mathbb{R}$ bzw. $\|\,.\,\|_\infty \colon \ell^\infty \to \mathbb{R}$ durch

$$x \mapsto \|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p} \qquad \text{bzw.} \qquad x \mapsto \|x\|_\infty := \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i|.$$

Zeigen Sie im Folgenden, dass

(a) es sich auch bei ℓ^p um einen $\mathbb{K}$-Vektorraum handelt.

(b) die *Hölder-Ungleichung für Folgen* erfüllt ist:

(i) Für $x \in \ell^1$ und $y \in \ell^\infty$ ist $xy \in \ell^1$ und es gilt

$$\|xy\|_1 \le \|x\|_1 \|y\|_\infty.$$

(ii) Für $p \in (1, \infty)$ und $q := \frac{p}{p-1}$ (also $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) und $x \in \ell^p$ sowie $y \in \ell^q$ ist $xy \in \ell^1$ und es gilt

$$\|xy\|_1 \le \|x\|_p \|y\|_q.$$

Hinweis: Benutzen Sie ohne Beweis, dass für $s, t \ge 0$ und $r \in [0, 1]$ die Ungleichung $s^r t^{1-r} \le rs + (1-r)t$ gilt und wenden Sie sie für $r = \frac{1}{p}$, $s = \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p}$ und $t = \frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}$ an.

Aufgabe 03.2. Zeigen Sie im Kontext der vorherigen Aufgabe, dass

(a) die *Minkowski-Ungleichung für Folgen* im Raum ℓ^p gilt: Sei $p \in [1, \infty)$ und $x, y \in \ell^p$. Dann gilt

$$\|x + y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$$

Hinweis: Benutzen Sie die Abschätzung $|x_i + y_i|^p \le |x_i||x_i + y_i|^{p-1} + |y_i||x_i + y_i|^{p-1}$ und wenden Sie die Hölder-Ungleichung an.

(b) es sich bei $\|\,.\,\|_p$ um eine Norm auf ℓ^p handelt.

(c) der normierte Raum $(\ell^p, \|\,.\,\|_p)$ vollständig ist.

Aufgabe 03.3.

(a) Zeigen Sie, dass die aus der Vorlesung bekannte Abbildung $\|\,.\,\|_{W^{k,p}(\Omega)}\colon W^{k,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, definiert als

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \coloneqq \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \le k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} & \text{für } p < \infty, \\ \displaystyle\max_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \le k} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{für } p = \infty \end{cases}$$

für $k \in \mathbb{N}_0$ und $p \in [1, \infty]$ tatsächlich eine Norm ist.

(b) Beweisen Sie, dass für $k \in \mathbb{N}_0$ und $p \in [1, \infty)$ die Norm $|||\,.\,|||_{W^{k,p}(\Omega)}\colon W^{k,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, definiert via

$$|||u|||_{W^{k,p}(\Omega)} \coloneqq \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \le k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)},$$

eine zu $\|\,.\,\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ äquivalente Norm darstellt.

Anmerkung: Sie brauchen nicht nachzuweisen, dass $|||\,.\,|||_{W^{k,p}(\Omega)}$ ebenfalls eine Norm auf $W^{k,p}(\Omega)$ ist.

Hinweis: Für eine Abschätzung könnte die diskrete Hölder-Ungleichung für endliche Tupel nützlich sein.

Aufgabe 03.4.

(a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Gleichheit:

$$(u_\varepsilon)_+ = (u_+)_\varepsilon.$$

Hierbei bezeichnet $u_\varepsilon \coloneqq u * \eta_\varepsilon$ die Glättung mit einem (skalierten) Standardkern η_ε und $u_+ \coloneqq \max\{u, 0\}$ den Positivteil der Funktion u.

(b) Sei weiterhin $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine affin-lineare Funktion. Gilt dann

$$f(u_\varepsilon) = (f(u))_\varepsilon?$$

Beweisen oder widerlegen Sie die Aussage.