**Fachbereich Mathematik**
**Univ.-Prof. Dr. Verena Bögelein**
**Ao. Univ.-Prof. Dr. Reinhard Wolf**
**Sommersemester 2019**

# 05. Blatt zur Übung Funktionalanalysis (Teil Bögelein)

(Besprechung am 19.06.2019)

**Aufgabe 15.**
Beweisen Sie, dass die auf $W^{k,p}(\Omega)$ definierten Normen $\|.\|$ bzw. $|||.|||$, definiert durch

$$\|u\| := \left( \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, d\mathcal{L}^n \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{bzw.} \quad |||u||| := \sum_{|\alpha|\le k} \left( \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, d\mathcal{L}^n \right)^{\frac{1}{p}}$$

äquivalent sind.

Erinnerung: Zwei Normen $\|.\|$ und $|||.|||$ auf einem Vektorraum $X$ heißen *äquivalent*, wenn es zwei nichtnegative Konstanten $C_1$, $C_2$ gibt, sodass die Ungleichungen $\|x\| \le C_1 |||x|||$ und $|||x||| \le C_2 \|x\|$ für alle $x \in X$ erfüllt sind.

**Aufgabe 16.**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N}$, $1 < p \le \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) $u \in L^p(\Omega) \iff u \in L^1_{\text{lok}}(\Omega)$ und $\left| \int_\Omega u\zeta \, d\mathcal{L}^n \right| \le C\|\zeta\|_{L^q(\Omega)}$ für alle $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$.

(b) $u \in W^{k,p}(\Omega) \iff u \in L^1_{\text{lok}}(\Omega)$ und $\left| \int_\Omega u D^\alpha \zeta \, d\mathcal{L}^n \right| \le C\|\zeta\|_{L^q(\Omega)}$ für alle $|\alpha| \le k$ und alle $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$.

Hinweis: Benutzen Sie für „$\Longleftarrow$“ unter Anderem den Satz von Hahn-Banach.

**Aufgabe 17.**
Sei $X$ ein Banachraum, $X'$ sein Dualraum und $X''$ sein Bidualraum, sowie $i\colon X \to X''$ die kanonische Einbettung. Beweisen Sie folgende Eigenschaften:

**(a)** Schwache bzw. Schwach-$*$-Grenzwerte sind eindeutig.

**(b)** $x_k \to x$ in $X \implies x_k \rightharpoonup x$ in $X$.

**(c)** $x'_k \rightharpoonup x'$ in $X' \implies x'_k \overset{*}{\rightharpoonup} x'$ in $X'$.

**(d)** $x_k \rightharpoonup x$ in $X \iff i(x_k) \overset{*}{\rightharpoonup} i(x)$ in $X''$.

**(e)** $x'_k \overset{*}{\rightharpoonup} x'$ in $X' \implies \|x'\|_{X'} \le \liminf_{k\to\infty} \|x'_k\|_{X'}$.

**(f)** $x_k \rightharpoonup x$ in $X \implies \|x\|_X \le \liminf_{k\to\infty} \|x_k\|_X$.

Hinweis: Nutzen Sie für (e) die Definition der Operatornorm und für (f) die Darstellung der Norm eines Vektors als Supremum über die Dualvektoren aus.