

# Geometrie

Eine Vorlesung von Johann Linhart  
im Sommersemester 2008

6. August 2008



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Was ist Geometrie?</b>	<b>1</b>
1.1	Modelle des Anschauungsraums . . . . .	1
1.2	Verallgemeinerungen dieser Modelle . . . . .	2
1.3	Veranschaulichung abstrakter Strukturen . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Aus der Geschichte der Geometrie</b>	<b>3</b>
2.1	Geometrie in der Antike . . . . .	3
2.1.1	Die Elemente des Euklid . . . . .	4
2.1.2	Die Antike nach Euklid . . . . .	5
2.2	Analytische Geometrie . . . . .	6
2.2.1	Descartes . . . . .	6
2.2.2	Fermat . . . . .	6
2.2.3	Weiterentwicklung der analytischen Geometrie . . . . .	7
2.3	Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie . . . . .	7
2.3.1	Versuche zum Beweis des Parallelenaxioms . . . . .	7
2.3.2	Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie . . . . .	7
2.4	Die Axiomatisierung der Geometrie durch Hilbert . . . . .	12
2.4.1	Die Hilbert'schen Axiome der ebenen Geometrie . . . . .	13
2.4.2	Die Widerspruchsfreiheit des Hilbert'schen Axiomensystems . . . . .	18

2.4.3	Die Unabhängigkeit der Hilbert'schen Axiome . . . . .	20
2.5	Geometrie und Transformationsgruppen . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Affine Geometrie</b>	<b>23</b>
3.1	Vektoren und affine Räume . . . . .	23
3.2	Affine Teilräume . . . . .	26
3.2.1	Verbindungsgeraden . . . . .	30
3.2.2	Durchschnitt affiner Teilräume . . . . .	36
3.2.3	Summen von Teilmengen und Teilräumen . . . . .	38
3.2.4	Verbindung affiner Teilräume . . . . .	40
3.2.5	Hyperebenen von affinen Teilräumen . . . . .	43
3.3	Affine Abbildungen . . . . .	44
3.3.1	Affinitäten und affine Invarianten . . . . .	47
3.3.2	Parallelprojektionen . . . . .	49
3.4	Konvexe Mengen . . . . .	51
3.4.1	Grundlegende Begriffe und Sätze . . . . .	51
3.4.2	Kombinatorische Sätze über konvexe Mengen . . . . .	57
3.4.3	Sternförmige Mengen . . . . .	61
3.4.4	Topologische Eigenschaften konvexer Mengen . . . . .	64
3.4.5	Trennungssätze . . . . .	68
3.4.6	Konvexe Polytope und ihre Seiten . . . . .	74
3.4.7	Polarität . . . . .	85
3.4.8	Der Euler'sche Polyedersatz und verwandte Gleichungen	95
3.4.9	Die zyklischen Polytope und das Upper Bound Theorem	102
3.5	Quadriken . . . . .	105
3.5.1	Einleitung . . . . .	105
3.5.2	Quadratische Formen . . . . .	107
3.5.3	Quadriken . . . . .	119

<b>4 Euklidische Geometrie</b>	<b>145</b>
4.1 Längen-, Flächen- und Volumsmessung . . . . .	145
4.1.1 Längenmessung . . . . .	145
4.1.2 Flächenmessung im $\mathbb{R}^2$ . . . . .	152
4.1.3 Flächen- und Volumsmessung im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	163
4.1.4 Verallgemeinerung auf den $\mathbb{R}^d$ . . . . .	173
4.2 Isometrien . . . . .	176
4.2.1 Klassifikation der Isometrien im $\mathbb{R}^2$ . . . . .	179
4.2.2 Klassifikation der Isometrien im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	183
4.3 Quadriken (euklidisch) . . . . .	186
4.3.1 Euklidische Koordinatentransformation quadratischer Formen . . . . .	186
4.3.2 Euklidische Normalform der Quadriken . . . . .	187
4.3.3 Hauptachsen und Scheitel . . . . .	189
4.4 Kugeln und Sphären . . . . .	191
4.4.1 Definition . . . . .	191
4.4.2 Potenz eines Punktes in Bezug auf eine Kugel oder Sphäre . . . . .	192
4.4.3 Dirichlet- und Voronoi-Zellen . . . . .	194
4.4.4 Die stereographische Projektion . . . . .	198
4.4.5 Delaunay-Triangulationen . . . . .	206
<b>5 Äquiforme Geometrie</b>	<b>213</b>
5.1 Winkelmessung . . . . .	213
5.2 Ähnlichkeiten . . . . .	214



# Kapitel 1

## Was ist Geometrie?

Die Geometrie ist eine jahrtausendealte Wissenschaft. Im Laufe dieser langen Zeit hat sich das, was man unter Geometrie versteht, vielfach gewandelt. Ursprünglich verstand man unter Geometrie die Vermessungskunde. Wörtlich übersetzt bedeutet ja Geometrie "Erd-Messung", und deshalb nennt man Vermessungsingenieure auch "Geometer".

### 1.1 Modelle des Anschauungsraums

Heute versteht man unter Geometrie zunächst einmal das Studium von mathematischen Modellen des Raumes, der uns auf Grund der Anschauung vertraut ist. Das am meisten verwendete Modell ist der  $\mathbb{R}^3$ , also die Menge aller Tripel  $(x, y, z)$  von reellen Zahlen. Aber es gibt eine Reihe anderer Modelle, die für gewisse Zwecke unter Umständen günstiger sind und nicht unbedingt zum  $\mathbb{R}^3$  äquivalent sein müssen. Ein wichtiges Beispiel ist der (dreidimensionale) projektive Raum.

Mit Hilfe eines solchen Modells kann man dann z.B. Abstände, Flächen- und Rauminhalte (Kapitel 4.1), Schnittpunkte und -kurven berechnen (Kapitel 3.2 und 3.5).

Bedeutende Anwendungen haben sich in den letzten Jahrzehnten mit der Entwicklung der Computertechnologie ergeben, insbesondere die berechnete Bildschirmdarstellung von räumlichen, eventuell bewegten Objekten und die computergesteuerte Bewegung von Maschinenteilen (Robotik, vgl. Kapitel 4.2).

## 1.2 Verallgemeinerungen dieser Modelle

Im weiteren Sinne versteht man unter Geometrie auch das Studium von Verallgemeinerungen und Modifikationen der oben genannten Modelle, vor allem den  $n$ -dimensionalen Raum  $\mathbb{R}^n$ , aber auch z.B. die so genannten nichteuklidischen Geometrien (Kapitel 2.3) und die auch in der Informatik verwendete Minkowski-Geometrie. Diese Modelle eignen sich zur Beschreibung vieler verschiedener Situationen in zahlreichen Anwendungsgebieten, nicht nur in der Physik und den anderen naturwissenschaftlichen und technischen Disziplinen, sondern auch z.B. in der Wirtschaftswissenschaft (etwa bei der linearen Optimierung, vgl. Kapitel 3.4.6) und im Bereich der Statistik und ihrer Anwendungen.

## 1.3 Veranschaulichung abstrakter Strukturen

Auf Grund des anschaulich-geometrischen Ursprungs dieser Modelle ist es oft möglich, sich auch von sehr abstrakten mathematischen Strukturen gewisse anschauliche Vorstellungen zu machen und diese dadurch eventuell besser zu durchschauen (siehe z.B. Kapitel 3.4.6). Das gilt sogar für die unendlichdimensionalen "Räume" der Funktionalanalysis, wie es schon durch die dort verwendete geometrische Sprechweise zum Ausdruck kommt. Z.B. kann man den grundlegenden "Satz von Hahn-Banach" so ausdrücken: Zu einem Punkt  $p$  und einer konvexen Menge  $C$  mit  $p \notin C$  gibt es stets eine Hyperebene, so dass  $p$  auf der einen und  $C$  auf der anderen Seite dieser Hyperebene liegt (vgl. Kapitel 3.103).

# Kapitel 2

## Aus der Geschichte der Geometrie

Im Folgenden werden nur einige ausgewählte Themen aus der Geschichte der Geometrie behandelt, und zum Teil nur sehr kurz. Ausführlichere Informationen über die Geschichte der Geometrie und allgemeiner über die Geschichte der Mathematik finden Sie z.B. in dem Buch von Wußing [14] und auf folgender Internetseite: <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/>.

### 2.1 Geometrie in der Antike

Schon die alten Babylonier entdeckten während der Hochblüte ihrer Kultur (um 1800 - 1600 v.Chr.) einige interessante geometrische Gesetzmäßigkeiten. So konnten sie die Diagonale eines Quadrats ziemlich genau berechnen und kannten auch den Zusammenhang zwischen den Längen der Katheten und der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, der später "Satz von Pythagoras" genannt wurde.

Auch die Ägypter konnten bereits um 1850 v.Chr. gewisse nicht ganz einfache geometrische Aufgaben lösen, z.B. die Berechnung des Volumens eines Pyramidenstumpfs.

Die Griechen (insbesondere *Pythagoras von Samos* und seine Schule) begannen um 500 v.Chr. damit, allgemeingültige mathematische Sätze aufzustellen und zu beweisen. Das wichtigste diesbezügliche Dokument sind die "Elemente" des *Euklid von Alexandria*, in denen dieser um 300 v.Chr. das

mathematisch-geometrische Wissen seines Kulturkreises systematisch darstellte und versuchte, es auf eine exakte Grundlage zu stellen. Die "Elemente" bestehen aus 13 Büchern und enthalten ca. 465 Lehrsätze samt Beweisen, von denen sich ein guter Teil auf geometrische Fragen bezieht.

### 2.1.1 Die Elemente des Euklid

Euklid beginnt mit Definitionen, Postulaten und Axiomen. Das, was Euklid "Definitionen" nennt, sind teilweise nur anschauliche Beschreibungen ohne mathematische Bedeutung, z.B.: "Ein Punkt ist, was keinen Teil hat.", "Eine Linie ist eine Länge ohne Breite", usw.. Diese Definitionen werden im Weiteren überhaupt nicht verwendet. Andere Definitionen enthalten jedoch mathematische Aussagen und sind mit Definitionen in heutigem Sinn vergleichbar, z.B.: "*Parallel* sind gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und nach beiden Seiten unbegrenzt verlängert auf keiner Seite zusammen treffen."

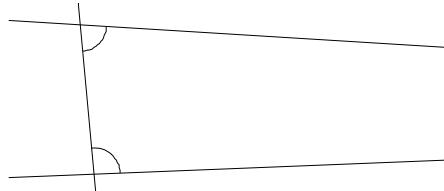
Es war wohl schon Euklid klar, dass man nicht jeden Begriff durch Zurückführung auf andere Begriffe definieren kann. Irgendwo muss man anfangen. Wir müssen also in der Mathematik gewisse undefinierte Grundbegriffe verwenden, die nur dadurch festgelegt sind, dass wir von ihnen die Gültigkeit gewisser Aussagen annehmen, welche Euklid "Postulate" genannt hat und die man heute "Axiome" nennt. (Euklid hat unter "Axiomen" gewisse logische Regeln verstanden, z.B.: "Dinge, die demselben Ding gleich sind, sind auch untereinander gleich.")

Euklid formulierte fünf Postulate zur Grundlegung der ebenen Geometrie, die man in heutigem Deutsch etwa folgendermaßen ausdrücken kann:

1. Je zwei Punkte können durch eine gerade Linie verbunden werden. (So eine Linie nennen wir "Strecke").
2. Jede Strecke lässt sich unbegrenzt gerade verlängern.
3. Zu jedem Mittelpunkt und jedem Radius kann man einen entsprechenden Kreis zeichnen.
4. Alle rechten Winkel sind gleich.
5. Wenn eine Gerade zwei andere Geraden trifft und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, die zusammen kleiner als zwei rechte Winkel sind, sollen jene beiden Geraden, unbegrenzt verlängert, auf derjenigen Seite

zusammentreffen, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei rechte Winkel sind.

Die folgende Skizze illustriert das 5. Postulat:



Das 5. Postulat heißt auch *Parallelenaxiom*. Im Wesentlichen besagt es, dass zwei Gerade, die nicht parallel sind, immer einen Schnittpunkt besitzen.

Euklid versuchte, alle geometrischen Sätze auf Grund dieser Postulate und der (eigentlichen) Definitionen rein logisch, nur unter Benützung gewisser Schlussregeln, zu beweisen. Historisch gesehen war das eine großartige Leistung, und die Bücher von Euklid wurden etwa 2000 Jahre lang als mustergültig hinsichtlich Klarheit und logischer Strenge angesehen. Sie fanden weite Verbreitung an Schulen und Universitäten.

Aus heutiger Sicht müssen wir allerdings feststellen, dass die Vorgangsweise von Euklid keineswegs unseren Ansprüchen an logischer Strenge gerecht wird. Er verwendet in Wirklichkeit bei seinen Beweisen stillschweigend eine ganze Reihe von Annahmen, die er in seinen Definition und Postulaten nicht formuliert hat. Das erste einwandfreie Axiomensystem zur Grundlegung der Geometrie stammt von Hilbert, nach wesentlichen Vorarbeiten von Pasch (siehe Kapitel 2.4).

### 2.1.2 Die Antike nach Euklid

Hier sind besonders *Archimedes von Syrakus* (287 - 212 v. Chr.) und *Appolonius von Perge* (ca. 262 - 190 v. Chr.) zu nennen, die die Geometrie beträchtlich weiter entwickelten. Z.B. konnte Archimedes den Flächeninhalt vieler krummlinig begrenzter Flächen berechnen, ebenso wie das Volumen verschiedener Körper mit gekrümmten Oberflächen. Von Appolonius stammt eine ausführliche Abhandlung über die Kegelschnitte. Er führte die Begriffe Ellipse, Hyperbel und Parabel ein.

## 2.2 Analytische Geometrie

Das Wesen der analytischen Geometrie besteht darin, durch die Verwendung von Koordinaten algebraische Methoden auf geometrische Fragestellungen anzuwenden.

In gewissem Sinne wurden bereits in der Antike Koordinaten verwendet. So haben *Hipparchos von Nicäa* (ca. 190 - 120 v. Chr.) und *Ptolemäus* (ca. 85 - 165, Ägypten) Orte auf der Erdoberfläche durch ihre geographische Länge und Breite angegeben, wobei sie natürlich einen anderen Nullmeridian als heute benützten. Auch *Heron von Alexandria* (ca. 10 - 75, Ägypten) verwendete so etwas Ähnliches wie Koordinaten, wenn er bei Vermessungen im Gelände zu einer festen Standlinie Parallelen festlegte, um so die zu bestimmende Fläche in Trapeze und Dreiecke zerlegen zu können.

Als hauptsächlichste Begründer der analytischen Geometrie gelten Descartes und Fermat.

### 2.2.1 Descartes

*René Descartes*, lateinisch *Renatius Cartesius* (1596 - 1650) ist vor allem als Philosoph bekannt. Er war der Hauptvertreter des Rationalismus. Wie in der Philosophie bemühte er sich aber auch in der Mathematik um klare Begriffe und scharfe Definitionen. Er führte Koordinaten unter anderem ein, um algebraische Gleichungen mit geometrischen Mitteln lösen zu können, also eigentlich die Umkehrung von dem, was man heute unter analytischer Geometrie versteht.

### 2.2.2 Fermat

*Pierre de Fermat* (1601 - 1665) war einer der bedeutendsten Mathematiker überhaupt. Was die analytische Geometrie betrifft, hat er die Gleichungen der Geraden und der Kegelschnitte gefunden. Er konnte im Wesentlichen beweisen, dass jede Gleichung zweiten Grades in zwei Unbekannten einen Kegelschnitt beschreibt (abgesehen von Ausartungsfällen) (siehe Kapitel 3.5.3). Übrigens war die auf die Antike zurückgehende Lehre von den Kegelschnitten eine der Wurzeln der analytischen Geometrie.

### 2.2.3 Weiterentwicklung der analytischen Geometrie

Im Laufe des 19. Jahrhunderts wurden Vektoren, Matrizen, Determinanten und andere algebraische Hilfsmittel in die analytische Geometrie eingeführt und mit großem Erfolg angewendet. Daran haben sich zahlreiche namhafte Mathematiker beteiligt, z.B. *August Ferdinand Möbius* (1790 - 1868), *Julius Plücker* (1801 - 1868) und *Hermann Grassmann* (1809 - 1877). Das ermöglichte insbesondere auch die Entwicklung einer Geometrie des  $n$ -dimensionalen Raums.

Heute wird die analytische Geometrie oft als Anwendungsgebiet und Veranschaulichungsmöglichkeit der linearen und multilinear Algebra angesehen.

## 2.3 Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie

### 2.3.1 Versuche zum Beweis des Parallelenaxioms

Das fünfte Postulat von Euklid ist länger und komplizierter als die anderen und auch nicht so unmittelbar klar. Schon Euklid hat daher versucht, so weit wie möglich ohne dieses Postulat auszukommen. Später haben eine Reihe von namhaften Mathematikern (z.B. *Giovanni Saccheri* (1667 - 1733), *Johann Lambert* (1728 - 1777), *Adrien-Marie Legendre* (1752 - 1833)) versucht, die Aussage dieses Parallelenaxioms aus den anderen vier Axiomen bzw. Postulaten herzuleiten. Scheinbar gelang das auch immer wieder, allerdings wurde dabei jedesmal stillschweigend etwas vorausgesetzt, was zum Parallelenaxiom äquivalent ist. Die Vorgangsweise war häufig so, dass man versuchte, aus der Negation des Parallelenaxioms einen Widerspruch zu den anderen Axiomen herzuleiten.

### 2.3.2 Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie

Ziemlich genau um das Jahr 1823 erkannten unabhängig voneinander drei große Mathematiker die Möglichkeit einer in sich widerspruchsfreien "Geometrie", in der das Parallelenaxiom nicht gilt. Dies waren:

- a) *Carl Friedrich Gauß* (1777 - 1855): Er entdeckte wahrscheinlich schon 1816 die Möglichkeit einer solchen Geometrie, veröffentlichte aber nichts darüber, da er den Widerstand seiner Zeitgenossen fürchtete.

b) *János Bolyai* (1802 - 1860): Er wusste von seinem Vater, der mit Gauß befreundet war, vom Problem des Parallelenaxioms, entdeckte aber die nichteuklidische Geometrie unabhängig von Gauß. Seine erste Publikation darüber erschien 1832 als Anhang einer Arbeit seines Vaters.

c) *Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski* (1792 - 1856) schrieb 1826 eine erste Arbeit über nichteuklidische Geometrie, die aber verschollen ist. Drei Jahre später erschien eine Arbeit von ihm über dieses Thema in einer unbedeutenden Zeitschrift.

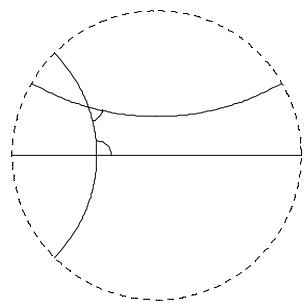
Außerdem hatte auch der Jurist *F.K. Schweikart* (1780 - 1857) versucht, eine selbständige nichteuklidische Geometrie aufzubauen.

Die tatsächliche Existenz einer widerspruchsfreien Geometrie, in der das Parallelenaxiom nicht gilt, wurde erst um 1871 durch *Felix Klein* (1849 - 1925) bewiesen. Der Grundgedanke war dabei folgender: Da die Grundbegriffe wie "Punkt", "Gerade", "Kreis", "rechter Winkel" nur durch die Gültigkeit der Axiome definiert sind, kann man sich im Prinzip darunter vorstellen, was man will, solange nur die Axiome erfüllt sind. Klein stellte sich nun unter einem "Punkt" einen gewöhnlichen Punkt vor, der aber im Inneren eines festen (gewöhnlichen) Kreises  $K$  liegt. Unter einer "Geraden" stellte er sich den Teil einer gewöhnlichen  $K$  schneidenden Geraden vor, der im Inneren von  $K$  liegt. Nachdem er auch die anderen Grundbegriffe, wie Abstand und Winkel, neu definiert hatte (was nicht ganz einfach ist), konnte er zeigen, dass bei dieser Interpretation der geometrischen Grundbegriffe alle euklidischen Axiome bis auf das Parallelenaxiom erfüllt sind. Genau genommen hat Klein auf diese Weise gezeigt: Wenn die gewöhnliche (euklidische) Geometrie (mit Gültigkeit des Parallelenaxioms) widerspruchsfrei ist, dann ist es auch die Geometrie, in der das Parallelenaxiom durch seine Negation ersetzt wird. (Das ist ein "relativer Widerspruchsfreiheitsbeweis". Einen absoluten Widerspruchsfreiheitsbeweis gibt es für keinen wesentlichen Teil der Mathematik. Die Gründe dafür werden in der mathematischen Logik untersucht. Siehe auch Kapitel 2.4.2)

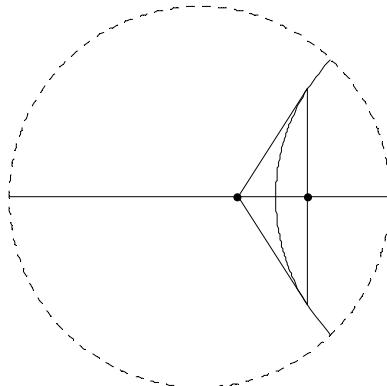
Die von Klein gegebene neue Interpretation der Begriffe "Punkt", "Gerade", usw. nennt man ein *Modell* des betrachteten Axiomensystems. In der Folge wurden verschiedene andere solche Modelle entdeckt. Besonders durchsichtig ist vielleicht das folgende Modell von *Henri Poincaré* (1854 - 1912): Wir betrachten wieder einen festen gewöhnlichen Kreis  $K$ , und die "Punkte" seien wieder die gewöhnlichen Punkte im Inneren von  $K$ . Unter einer "Geraden" verstehen wir aber jetzt den im Inneren von  $K$  liegenden Teil eines gewöhnlichen Kreises oder einer gewöhnlichen Geraden, welcher bzw. welche  $K$  rechtwinklig schneidet. Der Vorteil dieses Modells liegt darin, dass man jetzt

### 2.3. DIE ENTDECKUNG DER NICHT-EUKLIDISCHEN GEOMETRIE 9

unter einem "Kreis" einfach einen ganz innerhalb von  $K$  liegenden gewöhnlichen Kreis verstehen kann, und dass auch die Winkel im üblichen Sinn zu verstehen sind. Die folgende Zeichnung ist nun analog zu der Illustration des Parallelenaxioms (Seite 5) und zeigt anschaulich, dass in diesem *Poincaré'schen Kreismodell* das 5. Postulat von Euklid nicht gilt. (Der Kreis  $K$  ist strichliert.)



Andererseits kann man nachweisen, dass die übrigen Postulate von Euklid hier erfüllt sind, wenn man die vorkommenden Begriffe geeignet definiert. Insbesondere muss der Begriff "Radius" bzw. "Abstand" anders als üblich definiert werden. Um zu verstehen, wie das geht, kann man zunächst in natürlicher Weise Spiegelungen an "Geraden" definieren, und zwar so, wie man üblicherweise die Inversion an einem Kreis definiert (siehe Abbildung).



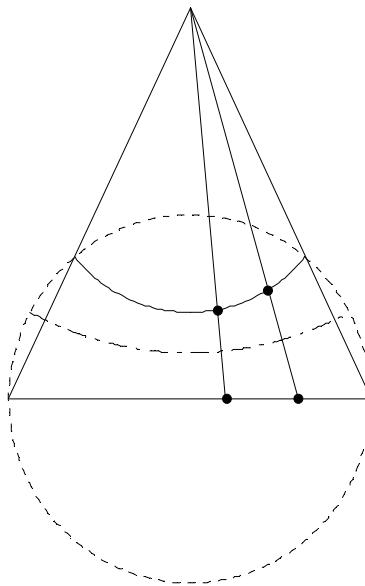
Man kann sich relativ leicht davon überzeugen, dass die Inversion an einer "Geraden" das Innere des Kreises  $K$  auf sich abbildet (Übungsaufgabe).

Man definiert nun den "Abstand" zweier Punkte so, dass er bei solchen Spiegelungen unverändert bleibt. Nimmt man für  $K$  den Einheitskreis des  $\mathbb{R}^2$ , so definiert man den "Abstand" zweier Punkte  $(x, 0)$  und  $(y, 0)$  auf der

1. Koordinatenachse  $L_1$  so:

$$d((x, 0), (y, 0)) := \left| \log \frac{1+x}{1-x} - \log \frac{1+y}{1-y} \right|.$$

Den "Abstand" zweier beliebiger Punkte kann man dann dadurch bestimmen, dass man sie durch eine geeignete Spiegelung auf  $L_1$  abbildet (siehe Abb.).



Eine wesentliche Eigenschaft dieses Abstandsbegriffs ist die folgende: je näher am Rand von  $K$  sich zwei Punkte befinden, umso kleiner ist gewissermaßen die Einheit, mit der ihr "Abstand" gemessen wird. So gilt z.B.

$$d((0, 0), (0.01, 0)) = \log \frac{1.01}{0.99} = 0.0200 \dots,$$

$$d((0.50, 0), (0.51, 0)) = \log \frac{1.51}{0.49} - \log \frac{1.50}{0.50} = 0.0268 \dots,$$

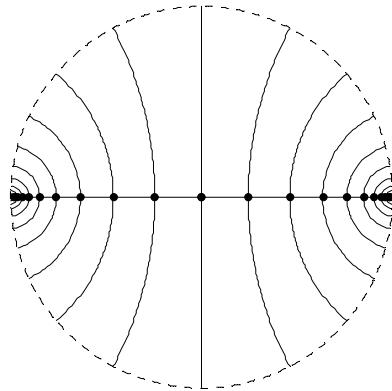
$$d((0.90, 0), (0.91, 0)) = \log \frac{1.91}{0.09} - \log \frac{1.90}{0.10} = 0.1106 \dots,$$

$$d((0.98, 0), (0.99, 0)) = \log \frac{1.99}{0.01} - \log \frac{1.98}{0.02} = 0.6981 \dots.$$

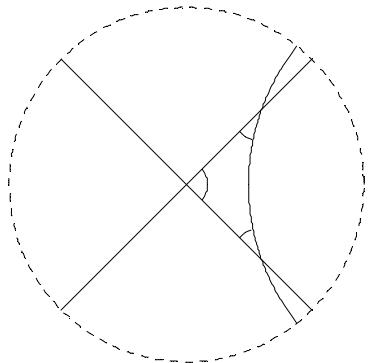
Die folgende Abbildung zeigt Punkte auf  $L_1$ , deren "Abstand" vom Ursprung gleich  $0, 0.5, 1.0, 1.5, \dots$  ist. Spiegelt man diese Punkte an einer "Geraden", die senkrecht zu  $L_1$  ist und durch einen dieser Punkte geht, so erhält man

### 2.3. DIE ENTDECKUNG DER NICHTEUKLIDISCHEN GEOMETRIE 11

wieder dieselbe Punktfolge.



Diese nichteuklidische Geometrie nennt man auch *hyperbolische Geometrie*. In der hyperbolischen Geometrie gelten natürlich viele Sätze nicht, die uns von der euklidischen Geometrie vertraut sind. So ist z.B. die Winkelsumme eines Dreiecks hier immer kleiner als  $180^\circ$  (vgl. Abbildung).



Die oben erklärte Abstandsfunktion hängt übrigens mit den bekannten Hyperbelfunktionen zusammen:  $\log \frac{1+y}{1-y} = 2 \operatorname{artanh} y$ , wobei  $\operatorname{artanh}$  ("area tangens hyperbolicus") die Umkehrfunktion von  $\tanh$  ("tangens hyperbolicus") ist ( $\tanh x := \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ ). Also gilt:  $d((x, 0), (y, 0)) = 2 |\operatorname{artanh} x - \operatorname{artanh} y|$ .

## 2.4 Die Axiomatisierung der Geometrie durch Hilbert

*Moritz Pasch* (1843 - 1930) war der erste Mathematiker, der (um 1882) klar erkannte, dass Euklid einige stillschweigende Annahmen getroffen hatte, die zwar anschaulich plausibel waren, aber nicht streng logisch aus den fünf Postulaten hergeleitet werden konnten. Diese Annahmen mussten also zu den Postulaten bzw. Axiomen hinzugefügt werden. Pasch formulierte insbesondere das Axiom, welches bei Hilbert als viertes Anordnungsaxiom aufscheint (siehe Seite 14).

Pasch war ein Wegbereiter für *David Hilbert* (1862 - 1943), der in seinem Buch "Die Grundlagen der Geometrie" [9] im Jahre 1899 erstmalig einen streng deduktiven Aufbau der Geometrie darlegte, in dem die Grundbegriffe nur durch die Gültigkeit der Axiome eingeschränkt werden. Hilbert sagte z.B.

"Wenn ich unter meinen Punkten irgendwelche Systeme von Dingen, z.B. das System {Liebe, Gesetz, Schornsteinfeger, ...} denke und dann nur meine sämtlichen Axiome als Beziehungen zwischen diesen Dingen annehme, so gelten meine Sätze, z.B. der Satz von Pythagoras, auch von diesen Dingen. Oder noch drastischer: Man muss jederzeit an Stelle von 'Punkten', 'Geraden', 'Ebenen' auch 'Tische', 'Stühle', 'Bierseidel' sagen können."

Hilbert betrachtete die Geometrie des dreidimensionalen Raumes. Durch Weglassung einiger Axiome erhält man daraus die Geometrie der Ebene, die also der Geometrie des Euklid entspricht. Hilbert benötigte dazu aber wesentlich mehr als fünf Axiome.

Nach Hilbert gehen wir (in leicht modifizierter Sprech- und Schreibweise) von irgendwelchen zwei disjunkten Mengen  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{G}$  aus. Die Elemente von  $\mathfrak{P}$  nennen wir *Punkte* und bezeichnen sie mit  $a, b, c, \dots$ . Die Elemente von  $\mathfrak{G}$  nennen wir *Geraden* und bezeichnen sie mit  $G, H, \dots$ . Weiters nehmen wir an, dass es zwischen Punkten und Geraden gewisse Beziehungen gibt, die wir mit Worten wie *liegen*, *zwischen*, und *kongruent* bezeichnen. Die Bedeutung dieser Beziehungen ist ebenso wie die der Punkte und Geraden nur durch die Gültigkeit der Axiome eingeschränkt.

Hilbert unterteilte seine Axiome in fünf Gruppen, die im Folgenden für den Fall der ebenen Geometrie in etwas modifizierter Form dargestellt werden.

### 2.4.1 Die Hilbert'schen Axiome der ebenen Geometrie

#### I. Verknüpfungsaxiome (auch *Inzidenzaxiome* )

Diese Axiome beziehen sich auf den (undefinierten) Begriff "inzidieren".

1. Zu zwei (verschiedenen) Punkten  $a, b$  gibt es stets genau eine Gerade  $G$ , die mit jedem der beiden Punkte inzidiert. Diese Gerade bezeichnen wir mit  $ab$ .

(Statt "inzidiert" sagt Hilbert eigentlich "zusammengehört" und weist darauf hin, dass für diesen Begriff verschiedene Sprechweisen verwendet werden, z.B. bedeutet " $G$  geht durch  $a$ " und " $a$  liegt auf  $G$ " dasselbe wie " $G$  inzidiert mit  $a$ ".)

2. Auf jeder Geraden liegen wenigstens zwei Punkte.
3. Es gibt wenigstens drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

#### II. Anordnungsaxiome

Diese Axiome beziehen sich auf den Begriff "zwischen".

1. Wenn ein Punkt  $b$  zwischen einem Punkt  $a$  und einem Punkt  $c$  liegt, so sind  $a, b, c$  drei verschiedene Punkte einer Geraden, und  $b$  liegt dann auch zwischen  $c$  und  $a$ .
2. Zu zwei Punkten  $a$  und  $b$  gibt es stets wenigstens einen Punkt  $c$  auf der Geraden  $ab$ , sodass  $b$  zwischen  $a$  und  $c$  liegt.

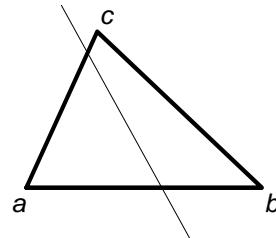
(Dieses Axiom ist mit dem 2. Postulat von Euklid verwandt, das sagt, dass man jede Strecke unbegrenzt verlängern kann.)

3. Unter irgendwelchen drei Punkten einer Geraden gibt es nicht mehr als einen, der zwischen den beiden anderen liegt.

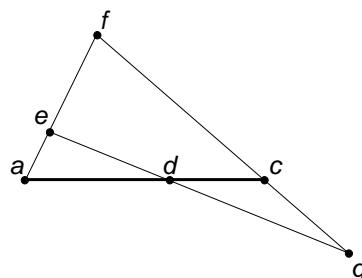
Mit Hilfe des Begriffs "zwischen" erklärt Hilbert nun den Begriff *Strecke*: Seien  $a$  und  $b$  zwei Punkte. Dann ist die Strecke  $\overline{ab}$  die Menge  $\{a, b\}$ . Die Punkte, welche zwischen  $a$  und  $b$  liegen, heißen die Punkte der Strecke  $\overline{ab}$ . Natürlich gilt  $\overline{ab} = \overline{ba}$ .

Das vierte Anordnungsaxiom geht auf Pasch zurück (siehe oben):

4. (*Axiom von Pasch*) Seien  $a, b, c$  drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte und  $G$  eine Gerade, die durch keinen der Punkte  $a, b, c$  geht. Wenn dann die Gerade  $G$  durch einen Punkt der Strecke  $\overline{ab}$  geht, so geht sie auch durch einen Punkt der Strecke  $\overline{ca}$  oder durch einen Punkt der Strecke  $\overline{bc}$ .



Mit diesen Axiomen kann man z.B. folgenden Satz beweisen: "Zu je zwei verschiedenen Punkten  $a, c$  gibt es wenigstens einen Punkt  $d$ , welcher zwischen  $a$  und  $c$  liegt." Der Beweis dieser sehr plausiblen Aussage ist allerdings schon ein bisschen anspruchsvoll. Die Beweisidee wird durch folgende Skizze veranschaulicht:



Versuchen Sie, einen entsprechenden Beweis zu finden! (Übungsaufgabe)

Durch mehrmalige Anwendung dieses Satzes folgt: Es gibt unendlich viele Punkte zwischen  $a$  und  $c$ .

Wir werden später (siehe Seite 18) auf einen weiteren Satz Bezug nehmen, der sich mit den bisher genannten Axiomen beweisen lässt, nämlich:

(*Satz von Moore*) "Vier Punkte einer Geraden lassen sich immer in der Weise mit  $a, b, c, d$  bezeichnen, dass  $b$  zwischen  $a$  und  $c$  und auch zwischen  $a$  und  $d$  liegt, und ferner  $c$  zwischen  $a$  und  $d$  und auch zwischen  $b$  und  $d$  liegt."

Hilbert hat die Aussage dieses Satzes in der ersten Auflage seines Buches noch als Axiom bezeichnet. Bald darauf (1902) hat aber *Eliakim Hastings Moore* (1862 - 1932, USA) erkannt, dass sie sich aus den vorhergehenden Axiomen herleiten lässt.

Für das nächste Axiom benötigt man folgende Begriffe:

Seien  $a$ ,  $b$  und  $o$  drei Punkte einer Geraden  $G$ . Wenn  $o$  zwischen  $a$  und  $b$  liegt, dann sagen wir:  $a$  und  $b$  liegen *auf der Geraden  $G$  auf verschiedenen Seiten des Punktes  $o$* . Wenn  $o$  nicht zwischen  $a$  und  $b$  liegt, dann sagen wir:  $a$  und  $b$  liegen *auf der Geraden  $G$  auf derselben Seite des Punktes  $o$* .

Die Menge aller Punkte auf der Geraden  $G$ , welche auf derselben Seite von  $o$  liegen (wie irgendein festgehaltener Punkt  $a \neq o$ ), nennen wir einen von  $o$  ausgehenden *Halbstrahl* (auch: *Halbgerade*) auf der Geraden  $G$ .

### III. Kongruenzaxiome

Diese Axiome dienen zur Beschreibung des Begriffs *"kongruent"*.

1. (*Streckenabtragung*) Seien  $a, b$  zwei Punkte und  $H$  eine von einem beliebigen Punkt  $a'$  ausgehende Halbgerade. Dann gibt es einen Punkt  $b'$  auf  $H$ , sodass  $\overline{ab}$  zu  $\overline{a'b'}$  kongruent ist.

Dieses Axiom beschreibt also die Möglichkeit, eine gegebene Strecke von einem Punkt aus auf einer Halbgeraden *"abzutragen"*.

2. Die durch den Begriff *"kongruent"* auf der Menge aller Strecken ausgedrückte Relation ist reflexiv, symmetrisch und transitiv (und somit eine Äquivalenzrelation).

Wenn wir statt *" $\overline{ab}$  ist zu  $\overline{a'b'}$  kongruent"* abkürzend  $\overline{ab} \equiv \overline{a'b'}$  schreiben, dann bedeutet dieses Axiom:

- a)  $\overline{ab} \equiv \overline{ab}$ ,
- b)  $\overline{ab} \equiv \overline{a'b'} \Rightarrow \overline{a'b'} \equiv \overline{ab}$ ,
- c)  $\overline{ab} \equiv \overline{a'b'} \wedge \overline{a'b'} \equiv \overline{a''b''} \Rightarrow \overline{ab} \equiv \overline{a''b''}$ .

Hilbert verlangt an dieser Stelle eigentlich nur die folgenderweise formulierte Transitivität:

$$\overline{a'b'} \equiv \overline{ab} \wedge \overline{a''b''} \equiv \overline{ab} \Rightarrow \overline{a'b'} \equiv \overline{a''b''}$$

und zeigt dann, dass man mit Hilfe des 1. Axioms die Reflexivität und Symmetrie herleiten kann.

3. (*Streckenaddition*) Seien  $a, b, c$  drei Punkte auf einer Geraden, sodass  $b$  zwischen  $a$  und  $c$  liegt. Ebenso seien  $a', b', c'$  drei Punkte auf einer Geraden, sodass  $b'$  zwischen  $a'$  und  $c'$  liegt. Wenn dann  $\overline{ab} \equiv \overline{a'b'}$  und  $\overline{bc} \equiv \overline{b'c'}$ , dann gilt auch  $\overline{ac} \equiv \overline{a'c'}$ .

Für das nächste Axiom benötigen wir die folgenden Begriffe:

Seien  $H$  und  $K$  zwei von einem Punkt  $o$  ausgehende Halbstrahlen, die verschiedenen Geraden angehören. Dann nennen wir die Menge  $\{H, K\}$  einen *Winkel* (mit *Scheitel*  $o$ ) und bezeichnen ihn mit  $\angle(H, K)$  oder  $\angle(K, H)$ . Die Halbstrahlen  $H$  und  $K$  heißen *Schenkel* des Winkels.

Seien  $a$  und  $b$  zwei Punkte und  $G$  eine Gerade. Wenn die Strecke  $\overline{ab}$  einen Punkt von  $G$  enthält, sagen wir:  $a$  und  $b$  liegen *auf verschiedenen Seiten der Geraden*  $G$ . Andernfalls sagen wir:  $a$  und  $b$  liegen *auf derselben Seite von*  $G$ . Die Menge aller Punkte, welche auf derselben Seite von  $G$  liegen (wie irgendein festgehaltener Punkt  $a$ , welcher nicht auf  $G$  liegt), heißt eine *Halbebene* von  $G$ .

4. (*eindeutige Winkelabtragung*) Sei  $\angle(H, K)$  ein Winkel,  $H'$  eine von einem Punkt  $a'$  ausgehende Halbgerade auf einer Geraden  $G'$ , und schließlich  $\varepsilon'$  eine Halbebene von  $G'$ . Dann gibt es genau eine von  $a'$  ausgehende Halbgerade  $K'$ , welche in  $\varepsilon'$  enthalten ist, sodass  $\angle(H', K')$  zu  $\angle(H, K)$  kongruent ist.

Auf Grund dieses Axioms ist es also möglich, einen gegebenen Winkel von einer beliebigen Halbgeraden aus abzutragen. Im Gegensatz zur Streckenabtragung (Axiom 1) wird hier Eindeutigkeit gefordert, sobald man auch noch die Seite der Geraden  $G$  angibt, auf die der Winkel abgetragen werden soll.

Die Eindeutigkeit der Streckenabtragung lässt sich daraus zusammen mit dem untenstehenden Axiom 6 folgern (Übungsaufgabe).

5. Die durch den Begriff "kongruent" auf der Menge aller Winkel ausgedrückte Relation ist ebenfalls reflexiv, symmetrisch und transitiv, also wieder eine Äquivalenzrelation.

Wir bezeichnen auch die Kongruenz von Winkeln mit dem Symbol  $\equiv$ .

Sei  $b$  der Scheitel eines Winkels  $\angle(H, K)$ ,  $a$  sei ein Punkt auf  $H$  und  $c$  ein Punkt auf  $K$ . Dann bezeichnen wir den Winkel  $\angle(H, K)$  auch mit  $\angle abc$ .

6. Seien  $a, b, c$  drei Punkte, welche nicht auf einer Geraden liegen, und ebenso seien  $a', b', c'$  drei Punkte, welche nicht auf einer Geraden liegen. Wenn dann die folgenden Kongruenzen gelten:

$$\overline{ab} \equiv \overline{a'b'}, \overline{ac} \equiv \overline{a'c'} \text{ und } \angle bac \equiv \angle b'a'c',$$

so gilt auch die Kongruenz

$$\angle abc \equiv \angle a'b'c'.$$

Dieses Axiom bedeutet also: Wenn bei einem Dreieck zwei Seiten und der davon eingeschlossene Winkel zu zwei Seiten und dem davon eingeschlossenen Winkel eines anderen Dreiecks kongruent sind, dann sind auch die übrigen Winkel des ersten Dreiecks zu den entsprechenden Winkeln des zweiten Dreiecks kongruent. (Für den dritten Winkel ergibt sich das durch Änderung der Bezeichnung der Ecken.)

Auf Grund dieser Axiome ist jetzt zum Beispiel möglich, zu erklären, was ein rechter Winkel sein soll: Zwei Winkel, die den Scheitel und einen Schenkel gemeinsam haben, und deren nicht gemeinsame Schenkel auf einer Geraden liegen, heißen *Nebenwinkel*. Ein Winkel, welcher zu einem seiner Nebenwinkel kongruent ist, heißt dann *rechter Winkel*. Man kann anschließend z.B. (etwas mühsam) zeigen, dass alle rechten Winkel zueinander kongruent sind, entsprechend dem 4. Postulat von Euklid (siehe [9]).

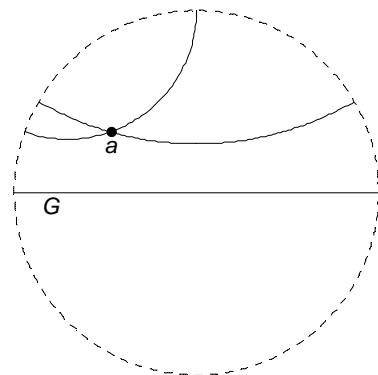
#### IV. Das Parallelenaxiom

Aus den bisher genannten Axiomen kann man Folgendes herleiten [9]: Wenn  $G$  eine Gerade ist und  $a$  ein Punkt, der nicht auf  $G$  liegt, dann gibt es eine Gerade, welche durch  $a$  geht und mit  $G$  keinen Punkt gemeinsam hat.

Man kann jedoch nicht beweisen, dass es nur *eine* solche Gerade gibt. Dies muss man durch ein eigenes Axiom fordern:

(*Parallelenaxiom*) Sei  $G$  eine Gerade und  $a$  ein Punkt, der nicht auf  $G$  liegt. Dann gibt es höchstens eine Gerade, die durch  $a$  geht und mit  $G$  keinen Punkt gemeinsam hat.

Die Notwendigkeit dieses Axioms ergibt sich daraus, dass in der hyperbolischen Geometrie (z.B. im Poincaré'schen Kreismodell) alle anderen Axiome erfüllt sind (einschließlich der folgenden Stetigkeitsaxiome), aber das Parallelenaxiom nicht.



Man drückt das auch so aus: das Parallelenaxiom ist *unabhängig* von den anderen Axiomen der ebenen Geometrie.

Die Gültigkeit der Axiome im Poincaré'schen Kreismodell wird zum Teil in den Übungen ausführlicher besprochen.

## V. Stetigkeitsaxiome

1. (*Archimedisches Axiom*) Sind  $\overline{ab}$  und  $\overline{cd}$  irgendwelche Strecken, so gibt es eine natürliche Zahl  $n$  derart, dass das  $n$ -malige Hintereinander-Abtragen der Strecke  $\overline{cd}$  von  $a$  aus auf den durch  $b$  gehenden Halbstrahl über den Punkt  $b$  hinausführt.
2. (*Vollständigkeitsaxiom*) Die Menge der Punkte einer Geraden mit seinen Anordnungs- und Kongruenzbeziehungen ist keiner Erweiterung fähig, bei welcher die zwischen den Elementen bestehenden Beziehungen sowie die aus den Axiomen I. bis III. folgenden Grundeigenschaften und das Axiom V.1 erhalten bleiben.

Mit den aus den Axiomen I. bis III. folgenden Grundeigenschaften sind gemeint:

- a) die Inzidenzaxiome I.,
- b) die Anordnungsaxiome II.1-3,
- c) der Satz von Moore (siehe Seite 14),
- d) die Kongruenzaxiome III.1-3,
- e) die Eindeutigkeit der Streckenabtragung (siehe Seite 16).

Erst auf Grund der Stetigkeitsaxiome kann man den Punkten einer Geraden in umkehrbar eindeutiger Weise reelle Zahlen zuordnen, sobald man zwei Punkte ausgewählt hat, welche den Zahlen 0 und 1 entsprechen sollen. Damit ist es dann möglich, Koordinaten einzuführen.

### 2.4.2 Die Widerspruchsfreiheit des Hilbert'schen Axiomensystems

Wie bereits erwähnt (siehe 2.3.2), gibt es keinen absoluten Widerspruchsfreiheitsbeweis. Man kann aber zeigen, dass das Hilbert'sche System wider-spruchsfrei ist, wenn es der  $\mathbb{R}^2$  mit den üblichen Definitionen der Begriffe

”Punkt”, ”Gerade”, ”zwischen” und ”kongruent” ist. Man geht dabei so vor, dass man die undefinierten Grundbegriffe des Hilbert’schen Axiomensystems im  $\mathbb{R}^2$  in geeigneter Weise *interpretiert* und dann zeigt, dass alle Axiome erfüllt sind. Man erhält so ein Modell dieses Axiomensystems. Das wird im Folgenden etwas näher ausgeführt.

Unter einem *Punkt* verstehen wir ein Element des  $\mathbb{R}^2$ , also ein geordnetes Paar  $x = (x_1, x_2)$  von reellen Zahlen  $x_1$  und  $x_2$ . Unter einer *Geraden* verstehen wir eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$  der Gestalt  $\{p + \lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}$  mit  $p = (p_1, p_2)$  und  $u = (u_1, u_2) \neq (0, 0)$ . Damit kann man schon die drei Verknüpfungsaxiome verifizieren (Übungsaufgabe). Man kann natürlich die Geraden ebenso gut durch ihre Gleichungen definieren, das heißt als Mengen der Gestalt  $\{(x_1, x_2) : a_1 x_1 + a_2 x_2 + b = 0\}$  mit drei (festen) reellen Zahlen  $a_1, a_2, b$ , wobei  $a_1$  und  $a_2$  nicht beide gleich Null sein dürfen.

Als nächstes definiert man den Begriff *zwischen*. Seien  $a, b, c$  Punkte einer Geraden  $G = \{p + \lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}$ . Dann gibt es reelle Zahlen  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  sodass  $a = p + \lambda_1 u$ ,  $b = p + \lambda_2 u$  und  $c = p + \lambda_3 u$ . Wir sagen nun ” $b$  liegt zwischen  $a$  und  $c$ ”, wenn  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$  oder  $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1$ . Diese Definition ist sinnvoll, da diese Zahlen  $\lambda_i$  bekanntlich eindeutig bestimmt sind. Damit kann man nun ganz leicht die Gültigkeit der ersten drei Anordnungsaxiome beweisen (Übungsaufgabe). Das vierte Axiom (das von Pasch) ist etwas schwieriger einzusehen. Man benützt dazu die Gleichung  $a_1 x_1 + a_2 x_2 + b = 0$  der auftretenden Geraden und überlegt sich, dass zwei nicht auf der Geraden liegende Punkte  $p = (p_1, p_2)$  und  $q = (q_1, q_2)$  im Sinne von Hilbert genau dann auf verschiedenen Seiten der Geraden liegen, wenn sie beim Einsetzen in die Gleichung verschiedenes Vorzeichen liefern, das heißt  $a_1 p_1 + a_2 p_2 + b > 0$  und  $a_1 q_1 + a_2 q_2 + b < 0$  oder umgekehrt (Übungsaufgabe).

Schließlich haben wir noch den Begriff *kongruent* für Strecken und Winkel zu definieren.

Wir nennen zwei Strecken  $\overline{ab}$  und  $\overline{a'b'}$  kongruent, wenn es eine Bewegung  $\beta$  gibt, sodass  $a' = \beta(a)$  und  $b' = \beta(b)$ .

(Eine Bewegung ist eine Abbildung  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : x \mapsto Ax + p$  mit einer orthogonalen Matrix  $A$  und einem  $p \in \mathbb{R}^2$  (siehe Kapitel 4.2). Dabei identifizieren wir natürlich einen Punkt  $(x_1, x_2)$  jeweils mit der entsprechenden einspaltigen Matrix  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ .)

Äquivalent dazu kann man sagen: Zwei Strecken  $\overline{ab}$  und  $\overline{a'b'}$  heißen kongruent, wenn der in der üblichen Weise definierte Abstand von  $a$  und  $b$  mit dem

Abstand von  $a'$  und  $b'$  übereinstimmt. (Unter dem *Abstand* von  $a = (a_1, a_2)$  und  $b = (b_1, b_2)$  versteht man die Zahl  $\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$ .)

Wir nennen zwei Winkel  $\angle(H, K)$  und  $\angle(H', K')$  kongruent, wenn es eine Bewegung  $\beta$  gibt, welche  $H$  auf  $H'$  und  $K$  auf  $K'$  abbildet.

Damit kann man nun auch die restlichen Axiome verifizieren, was wir zum Teil in den entsprechenden Kapiteln dieser Vorlesung tun werden.

Wir sehen also: Die *Axiome* von Hilbert entsprechen gewissen *Sätzen* der Geometrie des  $\mathbb{R}^2$  (und analog des  $\mathbb{R}^3$ ).

### 2.4.3 Die Unabhängigkeit der Hilbert'schen Axiome

Ähnlich wie beim Parallelenaxiom kann man auch bei jedem anderen Axiom von Hilbert zeigen, dass es sich nicht aus den übrigen Axiomen herleiten lässt (siehe [9]). Wenn man z.B. die Kongruenz von zwei Strecken  $\overline{ab}$  und  $\overline{a'b'}$  dadurch definiert, dass der folgenderweise definierte Abstand von  $a$  und  $b$  mit dem von  $a'$  und  $b'$  übereinstimmt:

$$\tilde{d}(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1 + x_2 - y_2)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

und alles Übrige wie oben beim  $\mathbb{R}^2$  festlegt, so kann man zeigen, dass dann alle Axiome bis auf III.6 erfüllt sind. Dass das Axiom III.6 hier nicht gilt, kann man z.B. so sehen: Betrachten wir die folgenden vier Punkte:

$$o = (0, 0), \quad a = (1, 0), \quad b = (-1, 0), \quad c = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Dann gilt  $\tilde{d}(o, a) = \tilde{d}(o, b) = \tilde{d}(o, c) = 1$ , und die beiden Winkel  $\angle aoc, \angle cob$  sind kongruent (nämlich rechte Winkel), da wir ja die Winkelkongruenz wie üblich definieren. Andererseits sind die Winkel  $\angle oac$  und  $\angle ocb$  nicht kongruent, im Widerspruch zum Axiom III.6.

## 2.5 Geometrie und Transformationsgruppen

*Felix Klein* hat bei seiner Antrittsvorlesung an der Universität Erlangen im Jahr 1872 eine Systematik der Geometrie vorgeschlagen, die seither unter dem Namen *"Erlanger Programm"* bekannt ist und an der sich auch heute noch viele Darstellungen der Geometrie orientieren, so auch diese Vorlesung.

Klein geht folgendermaßen vor: Sei  $M$  eine Menge und  $G$  eine Gruppe von Transformationen (das sind bijektive Abbildungen) von  $M$  auf sich. Dann

versteht man unter der zugehörigen Geometrie das Studium aller Eigenschaften von  $M$ , die bei Anwendung der Transformationen aus  $G$  unverändert (man sagt "invariant") bleiben. In diesem Sinne gibt es also viele "Geometrien". Z.B. besteht die *affine Geometrie* des  $\mathbb{R}^n$ , die wir als erste näher studieren werden, aus dem Studium aller Eigenschaften im  $\mathbb{R}^n$ , welche invariant gegenüber Affinitäten sind. (Affinitäten sind Abbildungen  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto Ax + b$  mit einer regulären  $n \times n$ -Matrix  $A$  und einem Vektor  $b \in \mathbb{R}^n$ .) Wichtige Beispiele für solche *affinen Invarianten* sind Parallelität und Teilverhältnis. Natürlich ist auch die Eigenschaft einer Teilmenge, eine Gerade zu sein, eine affine Invariante.

Weitere Beispiele für Geometrien, die wir in dieser Vorlesung diskutieren werden, sind die *euklidische Geometrie* (Kapitel 4), welche durch die Bewegungsinvarianten charakterisiert ist, und die *projektive Geometrie*, in der zwar schon noch Geraden in Geraden übergehen, aber weder Parallelität noch Teilverhältnis unverändert bleiben. Eine interessante *projektive Invariante* ist das Doppelverhältnis, das ist grob gesagt ein Verhältnis von zwei Teilverhältnissen.



# Kapitel 3

## Affine Geometrie

Das heute allgemein übliche Modell für den Anschauungsraum ist der  $\mathbb{R}^3$ . Dieser lässt sich leicht zum  $d$ -dimensionalen Raum  $\mathbb{R}^d$  verallgemeinern, wobei  $d$  eine beliebige natürliche Zahl ist. Der  $\mathbb{R}^d$  ist die Menge aller  $d$ -Tupel von reellen Zahlen:

$$\mathbb{R}^d := \{(x_1, \dots, x_d) : x_i \in \mathbb{R} \text{ für alle } i \in \{1, \dots, d\}\}.$$

Die Elemente des  $\mathbb{R}^3$  stellen in diesem Modell die Punkte des Anschauungsraums dar, daher nennt man allgemein die Elemente des  $\mathbb{R}^d$  oft **Punkte**.

Nach "Punkt" sind "Gerade" und "Ebene" die wichtigsten geometrischen Grundbegriffe. Um zu verstehen, wie die Geraden und Ebenen in unserem Modell aussehen, ist es zweckmäßig, wenn wir uns zuerst den Begriff "Vektor" ansehen.

### 3.1 Vektoren und affine Räume

**Definition 3.1** Seien  $p$  und  $q$  zwei Punkte des  $\mathbb{R}^d$ . Dann heißt

$$\vec{pq} := q - p$$

der **Vektor** von  $p$  nach  $q$ .  $p$  heißt der **Anfangspunkt** und  $q$  der **Endpunkt** dieses Vektors.

Vektoren sind also ebenfalls Elemente des  $\mathbb{R}^d$ . Wenn  $p$  und  $x$  beliebige Elemente des  $\mathbb{R}^d$  sind, so gibt es stets genau ein  $q \in \mathbb{R}^d$ , sodass  $x = \vec{pq}$ , nämlich

$q = p + x$ . Man drückt das meist so aus: "Man kann jeden Vektor von jedem beliebigen Punkt aus abtragen".

Anschaulich kann man sich den Vektor  $\vec{pq}$  als "gerichtete Strecke" oder "Pfeil" von  $p$  nach  $q$  vorstellen. Allerdings entspricht ein und derselbe Vektor unendlich vielen verschiedenen gerichteten Strecken, da man ihn ja von jedem Punkt aus abtragen kann.

Jedenfalls sehen wir, dass alle Elemente des  $\mathbb{R}^d$  als Vektoren vorkommen. Daher nennt man die Elemente des  $\mathbb{R}^d$  oft auch einfach **Vektoren**. Dabei taucht allerdings das Problem auf, dass die Elemente des  $\mathbb{R}^d$  in unserem Modell zwei verschiedene Bedeutungen haben: einerseits Punkte und andererseits Vektoren. Um diese Zweideutigkeit zu vermeiden, kann man den folgenderweise definierten "affinen Raum" betrachten.

**Definition 3.2** Sei  $M$  eine Menge,  $V$  ein Vektorraum (über dem Körper  $K$ ) und  $\Phi$  eine Abbildung  $M \times M \rightarrow V$  mit folgenden Eigenschaften:

- 1) Zu jedem  $P \in M$  und jedem  $x \in V$  gibt es genau ein  $Q \in M$ , sodass  $\Phi(P, Q) = x$ .
- 2) Für alle  $P, Q, R \in M$  gilt:  $\Phi(P, Q) + \Phi(Q, R) = \Phi(P, R)$ .

Dann heißt das Tripel  $A = (M, V, \Phi)$  **affiner Raum** (über dem Körper  $K$ ).

Die Elemente von  $M$  heißen **Punkte** (von  $A$ ), die Elemente von  $V$  heißen **Vektoren** (von  $A$ ).

$\Phi(P, Q)$  heißt der **Vektor von  $P$  nach  $Q$**  und wird auch mit  $\vec{PQ}$  bezeichnet.

Wir sehen sofort, dass das Tripel  $(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d, \Phi)$  mit  $\Phi(p, q) := q - p$  ein affiner Raum ist: Die erste Eigenschaft haben wir uns gerade oben überlegt, und die zweite folgt aus  $(q - p) + (r - q) = r - p$ . Genauso sieht man, dass jeder Vektorraum  $V$  einem affinen Raum entspricht, nämlich  $(V, V, \Phi)$  mit  $\Phi(p, q) := q - p$ .

**Bemerkung 3.3** Wenn  $M$  die leere Menge ist, dann ist  $(M, V, \Phi_0)$  für jeden Vektorraum  $V$  in trivialer Weise ein affiner Raum, wobei  $\Phi_0$  die "leere Abbildung"  $\emptyset = \emptyset \times \emptyset \rightarrow V$  ist. Der Einfachheit halber können wir für  $V$  den Nullraum  $\{o\}$  nehmen. Das Tripel  $(\emptyset, \{o\}, \Phi_0)$  nennt man dann den **leeren affinen Raum** und bezeichnet es manchmal auch einfach mit  $\emptyset$ .

Wir könnten nun ausführlich die Theorie der affinen Räume behandeln. Das würde sich aber nicht besonders lohnen, denn sobald man in einem affinen Raum einen Punkt als "Ursprung" auszeichnet, erhält man im Wesentlichen einen Vektorraum. Um das zu präzisieren, definieren wir zunächst einmal einen natürlichen Isomorphie-Begriff für affine Räume:

**Definition 3.4** Zwei affine Räume  $A = (M, V, \Phi)$  und  $A' = (M', V', \Phi')$  heißen **isomorph**, wenn es ein bijektive Abbildung

$$\alpha : M \rightarrow M'$$

und eine bijektive lineare Abbildung

$$\beta : V \rightarrow V'$$

gibt, sodass für beliebige Punkte  $P, Q \in M$  gilt:

$$\Phi'(\alpha(P), \alpha(Q)) = \beta(\Phi(P, Q)).$$

Wir sagen dann: Die beiden Abbildungen  $\alpha$  und  $\beta$  bilden einen Isomorphismus von  $A$  nach  $A'$ .

Das heißt also: Die Punkte von  $A$  werden durch  $\alpha$  umkehrbar eindeutig auf die Punkte von  $A'$  abgebildet, sodass der Vektor von  $P$  nach  $Q$  mittels  $\beta$  in den Vektor von  $\alpha(P)$  nach  $\alpha(Q)$  übergeht. Etwas ungenau könnten wir auch schreiben:

$$\overrightarrow{\alpha(P) \alpha(Q)} = \beta(\overrightarrow{PQ}) \quad \text{für alle } P, Q \in M.$$

**Satz 3.5** Sei  $A = (M, V, \Phi)$  ein affiner Raum und  $O \in M$ . Dann ist die Abbildung

$$\omega : M \rightarrow V : P \mapsto \Phi(O, P)$$

bijektiv, und auf Grund dieser Abbildung ist  $A$  isomorph zum affinen Raum, der dem Vektorraum  $V$  entspricht (d.h. zu  $(V, V, \Phi')$  mit  $\Phi'(p, q) := q - p$ ).

Bemerkung:  $\overrightarrow{OP} = \Phi(O, P)$  nennt man den **Ortsvektor** von  $P$ .

*Beweis des Satzes:* Die Bijektivität dieser Abbildung bedeutet, dass es zu jedem Vektor  $x \in V$  genau einen Punkt  $P$  gibt, sodass  $x = \Phi(O, P)$ . Das folgt aber unmittelbar aus der ersten Eigenschaft von  $\Phi$  gemäß Definition.

Wir sehen nun, dass die Abbildung  $\omega$  zusammen mit der Identität auf  $V$  einen Isomorphismus von  $A$  nach  $(V, V, \Phi')$  bildet:

$$\Phi'(\omega(P), \omega(Q)) = \omega(Q) - \omega(P) = \Phi(O, Q) - \Phi(O, P) = \Phi(P, Q)$$

auf Grund der zweiten Eigenschaft von  $\Phi$ .  $\square$

Affine Räume und Vektorräume unterscheiden sich also eigentlich nur dadurch, dass man in einem affinen Raum den Ursprung beliebig wählen kann, während er in einem Vektorraum von vornherein eindeutig festgelegt ist. Für viele Zwecke ist es daher mehr oder weniger egal, ob man affine Räume oder Vektorräume verwendet, und der Einfachheit halber bevorzugt man meist Vektorräume.

## 3.2 Affine Teilmäume

Teilmäume von affinen Räumen werden in natürlicher Weise definiert:

**Definition 3.6** *Sei  $A = (M, V, \Phi)$  ein affiner Raum. Eine Teilmenge  $L$  von  $M$  heißt **affiner Teilraum** von  $A$ , wenn es einen linearen Teilraum  $U$  von  $V$  gibt, sodass  $(L, U, \Phi|_{L \times L})$  wieder ein affiner Raum ist.*

Das heißt also:

- a)  $P, Q \in L \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \in U$ ,
- b) zu jedem  $P \in L$  und jedem  $x \in U$  gibt es genau ein  $Q \in L$ , sodass  $\overrightarrow{PQ} = x$ .

**Bemerkung 3.7** *Wenn  $L$  ein nicht leerer affiner Teilraum von  $A$  ist, so ist der zugehörige lineare Teilraum  $U$  eindeutig bestimmt, und zwar gilt für jeden beliebigen Punkt  $P \in L$ :*

$$U = \{\overrightarrow{PX} : X \in L\}.$$

*Beweis:* Sei  $U$  zunächst irgendein zu  $L$  gehöriger linearer Teilraum gemäß Definition. Für einen beliebigen Punkt  $P$  aus  $L$  sei  $U_P$  die Menge aller von  $P$  ausgehenden Vektoren mit einem Endpunkt aus  $L$ , d.h.  $U_P := \{\overrightarrow{PX} : X \in L\}$ . Dann ist  $U = U_P$ , denn  $U_P \subset U$  wegen a) und  $U \subset U_P$  wegen b).  $\square$

**Definition 3.8** *Der zu einem affinen Teilraum  $L \neq \emptyset$  von  $A$  gehörige lineare Teilraum heißt **Richtungsraum** von  $L$ . Bezeichnung:  $V_L$ .*

Die leere Menge ist trivialerweise ein affiner Teilraum von  $A$ , wobei man für  $U$  einen beliebigen linearen Teilraum von  $V$  nehmen kann. Üblicherweise definiert man aber  $V_\emptyset := \{o\}$ . Das entspricht dann dem leeren affinen Raum.

Die Dimension von affinen Räumen und Teilräumen wird ebenfalls in sehr natürlicher Weise definiert. Nur die leere Menge spielt eine gewisse Sonderrolle:

**Definition 3.9** *Unter der **Dimension** eines affinen Raums  $A = (M, V, \Phi)$  mit  $M \neq \emptyset$  versteht man die Dimension des zugehörigen Vektorraums  $V$ . Bezeichnung:  $\dim A$ .*

*Unter der Dimension eines nicht leeren affinen Teilraums  $L$  von  $A$  versteht man die Dimension des zugehörigen Richtungsraums  $V_L$ :  $\dim L := \dim V_L$ .*

*Zusätzlich definiert man:  $\dim \emptyset := -1$ .*

Eindimensionale affine Räume oder Teilräume nennt man **Geraden**, zweidimensionale **Ebenen**.  $(d-1)$ -dimensionale affine Teilräume eines  $d$ -dimensionalen affinen Raums  $A$  nennt man auch **Hyperebenen**. Für  $d = 2$  sind Hyperebenen also Geraden, für  $d = 3$  Ebenen.

Die nulldimensionalen affinen Teilräume von  $(M, V, \Phi)$  sind genau die einelementigen Teilmengen von  $M$ . Diese nennt man auch **Punkte**. Das ist allerdings etwas ungenau, denn  $p$  und  $\{p\}$  ist nicht dasselbe.

Wir betrachten in dieser Vorlesung nur **endlichdimensionale Vektorräume** und somit auch nur **endlichdimensionale affine Räume**. Im Folgenden wird also für jeden Vektorraum vorausgesetzt, dass er eine Basis aus endlich vielen Elementen besitzt, auch wenn das nicht ausdrücklich gesagt wird.

Für den wichtigen Spezialfall  $M = V$  sehen affine Teilräume genauso aus, wie sie normalerweise in der linearen Algebra definiert werden:

**Satz 3.10** *Eine nicht leere Teilmenge  $L$  eines Vektorraums  $V$  ist genau dann ein affiner Teilraum des zu  $V$  gehörigen affinen Raums  $(V, V, \Phi)$  (mit  $\Phi(p, q) := q - p$ ), wenn es einen linearen Teilraum  $U$  von  $V$  gibt, sodass*

$$L = p + U := \{p + u : u \in U\},$$

*wobei  $p$  ein beliebiger Punkt aus  $L$  ist.*

*Beweis:*

1. Sei  $L \neq \emptyset$  ein affiner Teilraum von  $A := (V, V, \Phi)$  und  $U$  der zugehörige Richtungsraum.

a)  $L \subset p + U$ :

Sei  $x \in L$ . Dann ist  $\vec{px} = x - p \in U$ . Es gibt daher ein  $u \in U$ , sodass  $x - p = u$ , und das heißt  $x = p + u$ . Also folgt  $x \in p + U$ .

b)  $p + U \subset L$ :

Sei  $q \in p + U$ . Dann gibt es ein  $u \in U$ , sodass  $q = p + u$ . Das heißt  $\vec{pq} = q - p = u \in U$ . Andererseits gibt es zu diesem  $u$  ein eindeutig bestimmtes Element  $q' \in L$ , sodass  $\vec{pq}' = u$ . Daher muss  $q = q' \in L$  sein.

2. Sei jetzt umgekehrt  $U$  ein beliebiger linearer Teilraum von  $V$  und  $L' := p + U$ . Wir haben zu zeigen, dass  $L'$  ein affiner Teilraum ist. Wir weisen dazu die zwei im Anschluss an die Definition eines affinen Teilraums genannten Eigenschaften nach:

a) Wenn  $p'$  und  $q'$  aus  $L'$  sind, dann gibt es  $u'$  und  $v' \in U$ , sodass  $p' = p + u'$  und  $q' = p + v'$ . Dann ist aber  $\vec{p'q'} = q' - p' = v' - u' \in U$ .

b) Sei  $x \in U$  und  $p' \in L'$  beliebig. Setzen wir  $q' := p' + x$ , so sehen wir:  $q' \in L'$  und  $\vec{p'q'} = x$ . Dieser Punkt  $q'$  ist natürlich eindeutig bestimmt:  $\vec{p'q'} = x$  heißt ja  $q' - p' = x$ , und das wiederum heißt  $q' = p' + x$ .  $\square$

**Bemerkung 3.11** Für den Richtungsraum  $U$  von  $L = p + U$  gilt:

$$U = L - p = \{x - p : x \in L\}.$$

(Vgl. Bemerkung 3.7.)

Die übliche Definition von affinen Teilräumen von Vektorräumen lautet:

**Definition 3.12** Eine Teilmenge  $L$  eines Vektorraums  $V$  heißt **affiner Teilraum** von  $V$ , wenn  $L$  entweder leer ist oder es einen Punkt  $p \in V$  und einen linearen Teilraum  $U$  von  $V$  gibt, sodass  $L = p + U$ .

Wir sehen also jetzt, dass die Definition von affinen Teilräumen als "Punkt + linearer Teilraum" wirklich dem natürlichen Teilraumbegriff für affine Räume entspricht: Eine Teilmenge  $L$  eines Vektorraums  $V$  ist genau dann ein affiner

Teilraum von  $V$ , wenn sie ein affiner Teilraum des zu  $V$  gehörigen affinen Raums ist.

Im Folgenden konzentrieren wir uns vor allem auf affine Teilräume eines reellen oder komplexen Vektorraums.

Den folgenden einfachen Satz werden wir öfters verwenden, ohne ihn jedesmal explizit anzusprechen.

**Satz 3.13** *Seien  $L_1$  und  $L_2$  zwei affine Teilräume (eines Vektorraums), von denen einer im anderen enthalten ist. Wenn  $\dim L_1 = \dim L_2$  ist, dann stimmen  $L_1$  und  $L_2$  überein.*

*Beweis:* Die Behauptung ist trivialerweise richtig, wenn  $L_1$  oder  $L_2$  leer ist. Wir können also annehmen, dass beide Teilräume nicht leer sind.

Sei o.B.d.A.  $L_1 \subset L_2$  und  $p \in L_1$ . Dann gilt für die Richtungsräume  $U_1$  und  $U_2$ :

$U_1 = L_1 - p \subset L_2 - p = U_2$  und  $\dim U_1 = \dim U_2$ . Daraus folgt aber bekanntlich  $U_1 = U_2$  und somit  $L_1 = L_2$ .  $\square$

**Folgerung 3.14** *Für affine Teilräume  $L_1, L_2$  gilt:  $L_1 \subsetneq L_2 \Rightarrow \dim L_1 < \dim L_2$ .*

*Beweis* (für nicht leere Teilräume): Aus  $L_1 \subset L_2$  folgt für die zugehörigen Richtungsräume  $U_1 \subset U_2$  und daher  $\dim L_1 \leq \dim L_2$ . Wenn nun außerdem  $L_1 \neq L_2$  ist, dann folgt aus dem vorigen Satz  $\dim L_1 \neq \dim L_2$  und somit  $\dim L_1 < \dim L_2$ .  $\square$

**Definition 3.15** *Zwei nicht leere affine Teilräume  $L_1, L_2$  heißen **parallel**, wenn von den zugehörigen Richtungsräumen einer im anderen enthalten ist. (Bezeichnung:  $L_1 \parallel L_2$ .)*

Oft betrachtet man hier nur den Fall, dass  $L_1$  und  $L_2$  gleiche Dimension haben. In diesem Fall stimmen dann die Richtungsräume überein. Im Gegensatz zum Parallelenbegriff bei Euklid und Hilbert ist hier auch der Fall  $L_1 \subset L_2$ , also insbesondere  $L_1 = L_2$  zugelassen.

Die Aussage des Parallelenaxioms ergibt sich aus folgendem Satz für den Fall  $\dim L = 1$  und  $\dim V = 2$ .

**Satz 3.16** *Sei  $p$  ein Punkt und  $L$  ein nicht leerer affiner Teilraum des Vektorraums  $V$ . Dann gibt es genau einen zu  $L$  parallelen Teilraum mit der gleichen Dimension wie  $L$ , welcher durch  $p$  geht.*

*Beweis:*

- a) Existenz:  $L = q + U$  mit einem eindeutig bestimmten linearen Teilraum  $U$ . Der affine Teilraum  $L' := p + U$  erfüllt dann die angegebenen Bedingungen.
- b) Eindeutigkeit: Sei  $L''$  ein beliebiger affiner Teilraum, der die Bedingungen erfüllt. Dann muss der Richtungsraum von  $L''$  mit  $U$  übereinstimmen (siehe oben). Wegen  $p \in L''$  muss daher  $L'' = p + U$  sein.  $\square$

Hier ist noch eine Bemerkung, die wir gelegentlich benutzen werden:

**Bemerkung 3.17** *Jeder echte affine Teilraum (eines Vektorraums) ist in einer Hyperebene enthalten.*

*Beweis:* Sei  $L$  ein echter affiner Teilraum des Vektorraums  $V$ , also  $L \neq V$ . Wenn  $L = \emptyset$  ist, ist die Behauptung wieder trivial. Sonst ist  $L = p + U$  mit einem linearen Teilraum  $U$  von  $V$ . Sei  $\{u_1, \dots, u_k\}$  eine Basis von  $U$ . Diese kann zu einer Basis  $\{u_1, \dots, u_n\}$  von  $V$  erweitert werden. Wegen  $L \neq V$  ist  $k \leq n-1$ , und daher ist  $L$  in der Hyperebene  $p + \text{lin}\{u_1, \dots, u_{n-1}\}$  enthalten. (lin bezeichnet die lineare Hülle.)  $\square$

### 3.2.1 Verbindungsgeraden

**Definition 3.18** *Seien  $p, q$  zwei verschiedene Punkte eines Vektorraums  $V$  über dem Körper  $K$ . Unter der **Verbindungsgeraden** von  $p$  und  $q$  versteht man die Menge*

$$pq := \{x : \exists \lambda \in K, \text{ sodass } x = p + \lambda(q - p)\}.$$

Das ist wirklich eine Gerade, denn wir könnten auch schreiben:

$$pq = p + U,$$

wobei  $U$  der eindimensionale lineare Teilraum mit Basis  $\{q - p\}$  ist.

Andere, äquivalente Definitionen der Verbindungsgeraden:

$$\begin{aligned} pq &= \{p + \lambda(q - p) : \lambda \in K\} \\ &= \{(1 - \lambda)p + \lambda q : \lambda \in K\}. \end{aligned}$$

**Satz 3.19** *Sei  $L$  ein affiner Teilraum eines Vektorraums. Dann enthält  $L$  mit je zwei Punkten auch deren Verbindungsgerade.*

*Beweis:* Sei  $L = p + U$  mit einem linearen Teilraum  $U$ .

Betrachten wir zwei (verschiedene) Punkte  $q_1, q_2 \in L$ . Dann gibt es  $u_1, u_2 \in U$ , sodass  $q_i = p + u_i$  für  $i \in \{1, 2\}$ .

Für alle  $\lambda \in K$  gilt  $q_1 + \lambda(q_2 - q_1) = p + u_1 + \lambda(u_2 - u_1) \in p + U = L$ , also ist  $q_1 q_2 \subset L$ .  $\square$

Wenn  $V$  ein Vektorraum über dem Körper  $\mathbb{Z}_2$  ist, dann besteht die Verbindungsgerade von zwei Punkten nur aus diesen beiden Punkten, da ja für  $\lambda$  nur die beiden Elemente  $\bar{0}$  und  $\bar{1}$  in Frage kommen. Abgesehen von diesem Spezialfall gilt jedoch die folgende Umkehrung des letzten Satzes:

**Satz 3.20** *Sei  $V$  ein Vektorraum über einem Körper  $K$ , der nicht nur aus Null- und Einselement besteht (kurz:  $K \neq \{0, 1\}$ ). Eine Teilmenge von  $V$  ist genau dann ein affiner Teilraum, wenn sie mit je zwei Punkten auch deren Verbindungsgerade enthält.*

*Beweis:*

Sei  $L$  eine Teilmenge von  $V$ , welche mit je zwei Punkten auch deren Verbindungsgerade enthält. Wenn  $L$  leer ist oder nur aus einem Punkt besteht, ist nichts zu zeigen. Sonst sei  $p \in L$  und  $U := \{x - p : x \in L\}$ . Dann ist  $L = p + U$ , und wir haben nur nachzuweisen, dass  $U$  ein linearer Teilraum ist.

a) Wir zeigen zuerst, dass  $U$  mit jedem Vektor auch alle skalaren Vielfachen davon enthält.

Sei  $u \in U$  und  $\lambda \in K$ . Dann gibt es ein  $x \in L$ , sodass  $u = x - p$ .

$$\lambda u = \lambda x - \lambda p = (1 - \lambda)p + \lambda x - p \in U,$$

denn  $(1 - \lambda)p + \lambda x$  ist ein Punkt der Verbindungsgeraden von  $p$  und  $x$  und liegt somit in  $L$ .

b) Jetzt haben wir noch nachzuweisen, dass  $U$  mit je zwei Vektoren auch deren Summe enthält. Sei also  $u_i = x_i - p \in U$  mit  $x_i \in L$  für  $i \in \{1, 2\}$ , und betrachten wir  $q := p + u_1 + u_2$ .

Wir versuchen nun, zwei Punkte  $p_1, p_2 \in L$  zu finden, sodass  $q$  auf der Verbindungsgeraden  $p_1 p_2$  liegt. Dann würde nämlich folgen:  $q = p + u_1 + u_2 \in L$ , und daher  $q - p = u_1 + u_2 \in U$ .

Wir versuchen es mit dem Ansatz  $p_1 = p + \mu_1 u_1$ ,  $p_2 = p + \mu_2 u_2$ .

Es geht also darum, Skalare  $\lambda, \mu_1, \mu_2$  zu finden, sodass

$$q = p + u_1 + u_2 = (1 - \lambda)(p + \mu_1 u_1) + \lambda(p + \mu_2 u_2).$$

Das ist sicher erfüllt, wenn folgende Gleichungen gelten:

$$1 = (1 - \lambda)\mu_1,$$

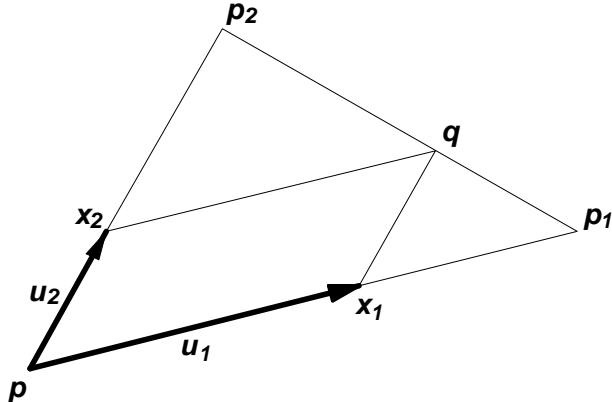
$$1 = \lambda\mu_2.$$

Nach Voraussetzung gibt es ein  $\lambda \in K \setminus \{0, 1\}$ . Setzen wir mit so einem  $\lambda$

$$\mu_1 = \frac{1}{1 - \lambda},$$

$$\mu_2 = \frac{1}{\lambda},$$

so sind die obigen Gleichungen erfüllt, und damit ist die Behauptung bewiesen.  $\square$



Zum Beweis von Satz 3.20.

Die bei den Verbindungsgeraden auftretende Linearkombination  $(1 - \lambda)p + \lambda q$  ist ein Spezialfall des folgendes Begriffs:

**Definition 3.21** Sei  $V$  ein Vektorraum über dem Körper  $K$ .

Seien  $p_1, \dots, p_n \in V$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  mit

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1.$$

Dann heißt  $\sum_{i=1}^n \lambda_i p_i$  eine **Affinkombination** von  $p_1, \dots, p_n$ .

**Satz 3.22** Eine Teilmenge  $L$  eines Vektorraums ist genau dann ein affiner Teilraum, wenn sie mit je endlich vielen Punkten auch alle ihre Affinkombinationen enthält.

*Beweis:*

Wenn  $L$  leer ist, so ist die Aussage des Satzes trivialerweise richtig. Es genügt also, wenn wir im Folgenden nicht leere Teilmengen betrachten.

1. Angenommen,  $L$  ist ein nicht leerer affiner Teilraum von  $V$ , also  $L = q + U$  mit  $q \in V$  und einem linearen Teilraum  $U$  von  $V$ .

Seien  $p_1, \dots, p_n \in L$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  mit  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ .

Wir haben zu zeigen, dass  $\sum_{i=1}^n \lambda_i p_i \in L$ .

Es gibt  $u_1, \dots, u_n \in U$ , sodass  $p_i = q + u_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Daher ist  $\sum_{i=1}^n \lambda_i p_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i (q + u_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i q + \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = (\sum_{i=1}^n \lambda_i) q + \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 1q + \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \in q + U = L$ .

2. Sei umgekehrt  $L$  eine beliebige nicht leere Teilmenge von  $V$ , die mit je endlich vielen Punkten auch alle ihre Affinkombinationen enthält. Sei  $q \in L$  beliebig, und  $U := \{x - q : x \in L\}$ . Dann ist  $L = q + U$ , und wir haben nur nachzuweisen, dass  $U$  ein linearer Teilraum ist. Dazu betrachten wir beliebige Elemente  $p, p' \in U$  und Skalare  $\lambda, \lambda'$  und haben zu zeigen, dass  $\lambda p + \lambda' p' \in U$  ist.

Es gibt  $x$  und  $x' \in L$ , sodass  $p = x - q$  und  $p' = x' - q$ .

$$\lambda p + \lambda' p' = \lambda(x - q) + \lambda'(x' - q) = (\lambda x + \lambda' x' + (1 - \lambda - \lambda')q) - q \in U,$$

denn  $\lambda x + \lambda' x' + (1 - \lambda - \lambda')q$  ist eine Affinkombination von  $x, x'$  und  $q$ , und liegt daher nach Voraussetzung in  $L$ .  $\square$

*Bemerkung zu diesem Beweis:* Wenn es sich um einen Vektorraum über einem Körper  $\neq \{0, 1\}$  handelt, dann kann man den 2. Teil des Beweises folgenderweise abkürzen: Wenn  $L$  mit je endlich vielen Punkten auch alle ihre Affinkombinationen enthält, dann enthält  $L$  insbesondere mit je zwei Punkten deren Verbindungsgerade und ist daher nach dem vorigen Satz ein affiner Teilraum.

Bei Affinkombinationen ist es oft günstiger, die Nummerierung mit Null zu beginnen, wie z.B. im Folgenden:

**Definition 3.23** Die Punkte  $p_0, \dots, p_n \in V$  heißen **affin abhängig**, wenn es Skalare  $\lambda_0, \dots, \lambda_n$  gibt, welche nicht alle gleich Null sind, sodass

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i p_i = o \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^n \lambda_i = 0.$$

Andernfalls heißen diese Punkte **affin unabhängig**.

Das hängt folgenderweise mit der linearen (Un-)Abhängigkeit zusammen:

**Bemerkung 3.24**  $p_0, \dots, p_n$  sind genau dann affin abhängig, wenn die Vektoren  $p_1 - p_0, \dots, p_n - p_0$  linear abhängig sind.

*Beweis:* Angenommen,  $\sum_{i=0}^n \lambda_i p_i = o$  mit  $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 0$ , und nicht alle  $\lambda_i = 0$ . Dann ist  $-\sum_{i=1}^n \lambda_i = \lambda_0$  und daher

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i (p_i - p_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i - \sum_{i=1}^n \lambda_i p_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i + \lambda_0 p_0 = \sum_{i=0}^n \lambda_i p_i = o.$$

Wäre  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ , dann müsste wegen  $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 0$  auch  $\lambda_0 = 0$  sein, im Widerspruch zur Annahme. Also sind  $p_1 - p_0, \dots, p_n - p_0$  linear abhängig.

Wenn umgekehrt  $p_1 - p_0, \dots, p_n - p_0$  linear abhängig sind, dann gibt es  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , nicht alle  $= 0$ , sodass  $\sum_{i=1}^n \lambda_i (p_i - p_0) = o$  ist. Dann folgt aber  $(-\sum_{i=1}^n \lambda_i) p_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i = o$ , und das zeigt die affine Abhängigkeit von  $p_0, \dots, p_n$ .  $\square$

Als einfache Folgerung daraus erkennen wir, dass zwei verschiedene Punkte  $p, q$  immer affin unabhängig sind, denn der Vektor  $q - p$  ist dann  $\neq o$  und daher linear unabhängig.

**Bemerkung 3.25** Im  $\mathbb{R}^d$  können höchstens  $d + 1$  Punkte affin unabhängig sein. Je  $d + 2$  Punkte des  $\mathbb{R}^d$  sind also affin abhängig.

*Beweis:* Es können ja höchstens  $d$  Vektoren linear unabhängig sein.

**Satz 3.26** Seien  $p_0, \dots, p_n$   $n+1$  affin unabhängige Punkte eines  $n$ -dimensionalen affinen Teilraums  $L$  von  $V$  (mit  $n \geq 0$ ). Dann lässt sich jeder Punkt von  $L$  in eindeutiger Weise als Affinkombination von  $p_0, \dots, p_n$  darstellen.

*Beweis:* Sei  $U$  der zu  $L$  gehörige Richtungsraum, also  $L = p_0 + U$ .

$p_1 - p_0, \dots, p_n - p_0$  sind  $n$  linear unabhängige Vektoren von  $U$ , und daher lässt sich jeder Vektor aus  $U$  in eindeutiger Weise als Linearkombination davon darstellen.

Zu jedem  $x \in L$  gibt es ein eindeutiges  $u \in U$  mit  $x = p_0 + u$ , und es gibt eindeutige Skalare  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , sodass  $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i(p_i - p_0)$ , d.h.

$$x = p_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i(p_i - p_0) = (1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i)p_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i.$$

Das ist daher die eindeutige Darstellung von  $x$  als Affinkombination von  $p_0, \dots, p_n$ .  $\square$

Als einfaches *Beispiel* sehen wir uns die Verbindungsgerade zweier Punkte an, sagen wir  $G = pq$ . Jeder Punkt von  $G$  lässt sich in eindeutiger Weise als Affinkombination von  $p$  und  $q$  darstellen, d.h. es gibt zu jedem Punkt  $x \in G$  einen eindeutig bestimmten Skalar  $\lambda$ , sodass  $x = (1 - \lambda)p + \lambda q$ . Dieser Skalar hat eine besondere Bedeutung und daher einen eigenen Namen:

**Definition 3.27** Seien  $x, p, q$  drei Punkte auf einer Geraden mit  $p \neq q$ . Dann heißt der eindeutig bestimmte Skalar  $\lambda$ , sodass  $x = (1 - \lambda)p + \lambda q$ , das **Teilverhältnis** von  $x$  bezüglich  $p$  und  $q$ . Wir bezeichnen es mit  $TV(p, q, x)$ .

Zu  $TV(p, q, x) = \lambda$  äquivalente Ausdrücke sind  $x = p + \lambda \vec{pq}$  und  $\vec{px} = \lambda \vec{pq}$ .

Seien  $x, p, q \in \mathbb{R}^d$  mit  $x = (x_1, \dots, x_d)$  usw.. Wenn  $p_i \neq q_i$ , dann kann man das Teilverhältnis so berechnen:

$$TV(p, q, x) = \frac{x_i - p_i}{q_i - p_i}.$$

*Bemerkung:* Die Reihenfolge der Punkte bei der Bezeichnung des Teilverhältnisses ist nicht einheitlich. Manchmal wird z.B.  $TV(x, q, p)$  statt  $TV(p, q, x)$  geschrieben (vgl. z.B. [13]).

*Beispiele:*

$$1) TV(p, q, p) = 0, TV(p, q, q) = 1.$$

$$2) \text{ Sei } m = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q. \text{ (Man nennt dann } m \text{ den } \textit{Mittelpunkt} \text{ von } p \text{ und } q.) \\ \text{ Dann ist } TV(p, q, m) = \frac{1}{2}.$$

*Bemerkung:* In einem reellen affinen Raum, also insbesondere im  $\mathbb{R}^d$ , kann man mit Hilfe des Teilverhältnisses den Begriff "zwischen" präzisieren: Wir

sagen:  $x$  liegt zwischen  $p$  und  $q$ , wenn  $x$  auf der Verbindungsgeraden von  $p$  und  $q$  liegt und  $0 < TV(p, q, x) < 1$  gilt (vgl. Kapitel 2.4.2).

Später werden wir gelegentlich folgende Bemerkung benützen:

**Bemerkung 3.28** *Sei  $S$  eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^d$ , die in keiner Hyperebene enthalten ist. Dann enthält  $S$   $d + 1$  affin unabhängige Punkte.*

*Beweis:*

Sei  $s$  die maximale Anzahl von affin unabhängigen Punkten in  $S$ , und  $p_0, \dots, p_{s-1}$  seien solche Punkte. Dann gilt für jeden Punkt  $p \in S$ , dass  $p_0, \dots, p_{s-1}, p$  affin abhängig sind. Mit  $u_k := p_k - p_0$  für  $k \in \{1, \dots, s-1\}$  heißt das, dass  $p - p_0$  von  $u_1, \dots, u_{s-1}$  linear abhängig ist. Sei  $U$  die lineare Hülle von  $u_1, \dots, u_{s-1}$ . Dann gilt also  $p - p_0 \in U$ , oder anders ausgedrückt  $p \in p_0 + U$ , für alle  $p \in S$ . Das heißt:  $S \subset p_0 + U$  mit  $\dim U = s - 1$ .

Wäre  $s \leq d$ , dann wäre  $S$  also in einem affinen Teilraum mit Dimension  $\leq d - 1$  und daher jedenfalls in einer Hyperebene enthalten (siehe Bemerkung 3.17), im Widerspruch zur Voraussetzung. Also folgt  $s \geq d + 1$  und damit die Behauptung.  $\square$

### 3.2.2 Durchschnitt affiner Teilräume

Wir betrachten in diesem und dem nächsten Teilkapitel der Einfachheit halber nur affine Teilräume von Vektorräumen.

**Satz 3.29** *Der Durchschnitt beliebig vieler affiner Teilräume eines Vektorraums  $V$  ist wieder ein affiner Teilraum von  $V$ .*

*Beweis:* Auf Grund von Satz 3.22 brauchen wir uns nur zu überlegen, dass der Durchschnitt von affinen Teilräumen mit je endlich vielen Punkten auch alle ihre Affinkombinationen enthält. Das ist aber fast trivial: Seien  $L_i$  affine Teilräume für alle  $i$  aus einer beliebigen (endlichen oder unendlichen) Indexmenge  $I$  und  $p_1, \dots, p_n$  seien Punkte aus dem Durchschnitt  $\bigcap_{i \in I} L_i$ . Ist  $p = \sum_{k=1}^n \lambda_k p_k$  irgendeine Affinkombination dieser Punkte, dann ist  $p \in L_i$  für alle  $i \in I$  und daher  $p \in \bigcap_{i \in I} L_i$ , was zu zeigen war.  $\square$

**Bemerkung 3.30** *Wenn der Durchschnitt zweier affiner Teilräume  $L_1$  und  $L_2$  nicht leer ist, dann ist der Richtungsraum von  $L_1 \cap L_2$  gleich dem Durchschnitt der Richtungsräume von  $L_1$  und  $L_2$ .*

*Beweis:* Sei  $L_1 = p + U_1$  und  $L_2 = p + U_2$  mit einem Punkt  $p \in L_1 \cap L_2$ . Dann ist offensichtlich

$$L_1 \cap L_2 = \{p + u : u \in U_1 \cap U_2\} = p + (U_1 \cap U_2). \square$$

Auf Grund von Satz 3.29 ist die folgende Definition sinnvoll:

**Definition 3.31** *Sei  $S$  eine beliebige Teilmenge eines Vektorraumes  $V$ . Dann versteht man unter der **affinen Hülle** von  $S$  den Durchschnitt aller affinen Teilräume von  $V$ , welche  $S$  enthalten. Bezeichnung:  $\text{aff } S$ .*

$\text{aff } S$  ist also der kleinste  $S$  enthaltende affine Teilraum von  $V$ .

**Satz 3.32** *Die affine Hülle einer Teilmenge  $S$  eines Vektorraumes  $V$  ist gleich der Menge aller Affinkombinationen von je endlich vielen Punkten aus  $S$ .*

*Beweis:* Sei  $A$  die Menge aller Affinkombinationen von je endlich vielen Punkten aus  $S$ . Nach Satz 3.22 gilt  $A \subset L$  für jeden  $S$  enthaltenden affinen Teilraum  $L$ , und daher  $A \subset \text{aff } S$ .

Nun ist aber  $S \subset A$ , denn jedes Element von  $S$  kann als Affinkombination von sich selbst aufgefasst werden:  $p = 1p$ . Für die Umkehrung genügt es daher, zu zeigen, dass  $A$  ein affiner Teilraum ist. (Denn dann folgt:  $\text{aff } S \subset A$ ).

Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass  $V$  ein Vektorraum über einem Körper  $\neq \{0, 1\}$  ist. Dann brauchen wir nur zeigen, dass  $A$  mit je zwei Punkten auch deren Verbindungsgerade enthält.

Seien  $x, y \in A$ , d.h.  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i$  und  $y = \sum_{i=n+1}^m \alpha_i p_i$  mit  $p_i \in S$ ,  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=n+1}^m \alpha_i = 1$ . Dann gilt für jeden Skalar  $\lambda$ :

$$(1 - \lambda)x + \lambda y = \sum_{i=1}^n (1 - \lambda)\alpha_i p_i + \sum_{i=n+1}^m \lambda \alpha_i p_i \in A,$$

denn die Summe der auftretenden Koeffizienten ist gleich 1:

$$\sum_{i=1}^n (1 - \lambda)\alpha_i + \sum_{i=n+1}^m \lambda \alpha_i = (1 - \lambda) \sum_{i=1}^n \alpha_i + \lambda \sum_{i=n+1}^m \alpha_i = (1 - \lambda) + \lambda = 1.$$

$A$  enthält also tatsächlich mit je zwei Punkten die Verbindungsgerade und ist daher ein affiner Teilraum.  $\square$

Mit Hilfe des Begriffs der affinen Hülle können wir in sinnvoller Weise jeder Teilmenge von  $V$  eine Dimension zuordnen:

**Definition 3.33** Sei  $S$  eine beliebige Teilmenge des Vektorraums  $V$ . Dann verstehen wir unter der **Dimension** von  $S$  die Dimension von  $\text{aff } S$ .

### 3.2.3 Summen von Teilmengen und Teilräumen

(Dieses Teilkapitel gehört eigentlich zur linearen Algebra.)

**Definition 3.34** Seien  $M_1$  und  $M_2$  zwei beliebige Teilmengen eines Vektorraums  $V$  über einem Körper  $K$ . Dann versteht man unter der (Minkowski'schen) **Summe** von  $M_1$  und  $M_2$  die folgende Menge:

$$M_1 + M_2 := \{x + y : x \in M_1, y \in M_2\}.$$

**Satz 3.35** Die Summe zweier linearer Teilräume  $U_1$  und  $U_2$  von  $V$  ist ebenfalls ein linearer Teilraum von  $V$ , und zwar gilt:

$$U_1 + U_2 = \text{lin}(U_1 \cup U_2).$$

*Beweis:*  $U_1 + U_2$  enthält selbstverständlich mit je zwei Vektoren auch deren Linearkombinationen und ist daher ein linearer Teilraum von  $V$ . Da  $U_1$  und  $U_2$  den Nullvektor enthalten, gilt klarerweise  $U_1 \subset U_1 + U_2$  und  $U_2 \subset U_1 + U_2$  und folglich  $U_1 \cup U_2 \subset U_1 + U_2$ . Da  $\text{lin}(U_1 \cup U_2)$  der kleinste  $U_1 \cup U_2$  enthaltende lineare Teilraum ist, folgt  $\text{lin}(U_1 \cup U_2) \subset U_1 + U_2$ .

Umgekehrt ist jedes Element von  $U_1 + U_2$  eine Linearkombination von Elementen aus  $U_1 \cup U_2$  und gehört daher zu  $\text{lin}(U_1 \cup U_2)$ .  $\square$

**Satz 3.36** (Dimensionsformel für lineare Teilräume) Seien  $U_1$  und  $U_2$  lineare Teilräume von  $V$ . Dann gilt:

$$\dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2.$$

**Bemerkung 3.37** Man kann diese Formel auch so schreiben:

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2).$$

*Beweis:* Sei  $\{w_1, \dots, w_k\}$  eine Basis von  $U_1 \cap U_2$ . Diese kann man nach dem Basisergänzungssatz einerseits zu einer Basis  $\{w_1, \dots, w_k, w_{k+1}, \dots, w_r\}$

von  $U_1$  und andererseits zu einer Basis  $\{w_1, \dots, w_k, w_{k+1}, \dots, w_s\}$  von  $U_2$  ergänzen.

*1. Behauptung:* Die Vektoren  $w_1, \dots, w_k, w_{k+1}, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_s$  sind linear unabhängig.

Angenommen,

$$\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_k w_k + \lambda_{k+1} w_{k+1} + \dots + \lambda_r w_r + \lambda_{r+1} w_{r+1} + \dots + \lambda_s w_s = o.$$

Dann ist  $a := \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_k w_k \in U_1 \cap U_2$ ,  $b := \lambda_{k+1} w_{k+1} + \dots + \lambda_r w_r \in U_1$ ,  $c := \lambda_{r+1} w_{r+1} + \dots + \lambda_s w_s \in U_2$ .

Es folgt  $c = -a - b \in U_1$  und daher  $c \in U_1 \cap U_2$ .

$c = -\lambda_1 w_1 - \dots - \lambda_k w_k - \lambda_{k+1} w_{k+1} - \dots - \lambda_r w_r$  ist die eindeutige Darstellung von  $c$  als Linearkombination der Basisvektoren  $w_1, \dots, w_k, w_{k+1}, \dots, w_r$  von  $U_1$ .

Wegen  $c \in U_1 \cap U_2$  muss sich  $c$  aber auch als eindeutige Linearkombination von  $w_1, \dots, w_k$  darstellen lassen. Daraus folgt

$$c = -\lambda_1 w_1 - \dots - \lambda_k w_k = -a \text{ und } \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_r = 0.$$

Somit ist  $a + c = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_k w_k + \lambda_{r+1} w_{r+1} + \dots + \lambda_s w_s = o$ .

Wegen der linearen Unabhängigkeit der Basisvektoren von  $U_2$  folgt daraus  $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$  und  $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_s = 0$ . Damit ist die 1. Behauptung bewiesen.

*2. Behauptung:* Die Vektoren  $w_1, \dots, w_k, w_{k+1}, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_s$  erzeugen  $U_1 + U_2$ .

Sei  $u \in U_1 + U_2$ . Dann ist  $u = u_1 + u_2$  mit  $u_1 \in U_1$  und  $u_2 \in U_2$ . Daher gibt es  $\lambda_i, \mu_i \in K$  mit  $u_1 = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_k w_k + \lambda_{k+1} w_{k+1} + \dots + \lambda_r w_r$  und  $u_2 = \mu_1 w_1 + \dots + \mu_k w_k + \mu_{r+1} w_{r+1} + \dots + \mu_s w_s$  und folglich

$$u = u_1 + u_2 = (\lambda_1 + \mu_1) w_1 + \dots + (\lambda_k + \mu_k) w_k + \lambda_{k+1} w_{k+1} + \dots + \lambda_r w_r + \mu_{r+1} w_{r+1} + \dots + \mu_s w_s.$$

Damit ist also die 2. Behauptung bewiesen.

Nun folgt  $\dim(U_1 + U_2) = s$ , also  $\dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) = s + k$ , und andererseits  $\dim U_1 + \dim U_2 = r + (s - (r - k)) = s + k$ , und daraus ergibt sich der Satz.  $\square$

### 3.2.4 Verbindung affiner Teilräume

**Definition 3.38** Unter der **Verbindung**  $L_1 \vee L_2$  zweier affiner Teilräume  $L_1, L_2$  versteht man die affine Hülle ihrer Vereinigung:

$$L_1 \vee L_2 := \text{aff}(L_1 \cup L_2).$$

$L_1 \vee L_2$  heißt auch **Verbindungsraum** von  $L_1$  und  $L_2$ .

Die Verbindungsgerade zweier Punkte ist ein Spezialfall dieses Begriffes: Sei  $G$  die Verbindungsgerade zweier (verschiedener) Punkte  $p_1$  und  $p_2$ , und  $L$  der Verbindungsraum der entsprechenden nulldimensionalen affinen Räume  $P_1 = \{p_1\}$  und  $P_2 = \{p_2\}$ , also  $L = \text{aff} \{p_1, p_2\}$ . Dann ist  $L$  nach Satz 3.32 gleich der Menge  $\{(1 - \lambda)p_1 + \lambda p_2 : \lambda \in \mathbb{R}\}$ , und das ist nichts anderes als  $G$ .

Der nächste Satz sagt uns, wie der Richtungsraum der Verbindung von  $L_1$  und  $L_2$  mit den Richtungsräumen von  $L_1$  und  $L_2$  zusammenhängt.

**Satz 3.39** Seien  $L_1 = p_1 + U_1$  und  $L_2 = p_2 + U_2$  zwei nicht leere affine Teilräume. Dann gilt mit einem beliebigen Punkt  $p \in L_1 \vee L_2$ :

$$L_1 \vee L_2 = \begin{cases} p + (U_1 + U_2) & \text{für } L_1 \cap L_2 \neq \emptyset, \\ p + (\text{lin} \{\overrightarrow{p_1 p_2}\} + U_1 + U_2) & \text{für } L_1 \cap L_2 = \emptyset. \end{cases}$$

(Die Klammern sind hier nur der Übersichtlichkeit halber gesetzt und können natürlich weggelassen werden.)

*Beweis:*

a) Sei  $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ . Betrachten wir zunächst einen Punkt  $p \in L_1 \cap L_2$ . Mit diesem Punkt gilt natürlich  $L_i = p + U_i$  für  $i \in \{1, 2\}$ .

$p + (U_1 + U_2)$  ist offensichtlich ein  $L_1$  und  $L_2$  enthaltender affiner Teilraum, also gilt  $L_1 \vee L_2 \subset p + (U_1 + U_2)$ .

Andererseits sind  $U_1$  und  $U_2$  im Richtungsraum von  $L_1 \vee L_2$  enthalten (da ja  $L_i \subset L_1 \vee L_2$  für  $i \in \{1, 2\}$ ). Da ein linearer Teilraum mit je zwei Vektoren auch deren Summe enthält, muss auch  $U_1 + U_2$  im Richtungsraum von  $L_1 \vee L_2$  enthalten sein, also  $U_1 + U_2 \subset (L_1 \vee L_2) - p$ . Das heißt aber nichts anderes als  $p + (U_1 + U_2) \subset L_1 \vee L_2$ . Schließlich ist auf Grund von Satz 3.10 klar, dass man in unserer Behauptung für  $p$  jeden beliebigen Punkt von  $L_1 \vee L_2$  nehmen kann.

b) Sei jetzt  $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ . Nehmen wir zunächst an, dass  $p = p_1$  ist. Dann ist  $L_1 = p + U_1$  offensichtlich in  $p + \text{lin}\{\overrightarrow{p_1p_2}\} + U_1 + U_2$  enthalten. Aber auch  $L_2$  ist darin enthalten: Sei  $x \in L_2$ , also  $x = p_2 + u_2$  mit einem  $u_2 \in U_2$ . Dann gilt  $x = p_1 + p_2 - p_1 + u_2 = p + \overrightarrow{p_1p_2} + u_2 \in p + \text{lin}\{\overrightarrow{p_1p_2}\} + U_1 + U_2$ . Aus der Definition von  $L_1 \vee L_2$  folgt somit:  $L_1 \vee L_2 \subset p + (\text{lin}\{\overrightarrow{p_1p_2}\} + U_1 + U_2)$ .

Umgekehrt sehen wir, ähnlich wie im Fall a), dass  $\text{lin}\{\overrightarrow{p_1p_2}\} + U_1 + U_2$  im Richtungsraum von  $L_1 \vee L_2$  enthalten ist, und somit  $p + (\text{lin}\{\overrightarrow{p_1p_2}\} + U_1 + U_2) \subset L_1 \vee L_2$  gilt; und schließlich können wir für  $p$  wieder jeden beliebigen Punkt von  $L_1 \vee L_2$  nehmen.  $\square$

Wir können nun die folgende wichtige Formel für die Dimension des Verbindungsraums herleiten.

**Satz 3.40** (Dimensionsformel für affine Teilräume) *Seien  $L_1 = p_1 + U_1$  und  $L_2 = p_2 + U_2$  zwei nicht leere affine Teilräume eines Vektorraums  $V$ . Dann gilt:*

$$\dim(L_1 \vee L_2) = \begin{cases} \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2) & \text{für } L_1 \cap L_2 \neq \emptyset, \\ \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(U_1 \cap U_2) + 1 & \text{für } L_1 \cap L_2 = \emptyset. \end{cases}$$

*Beweis:*

a) Im ersten Fall folgt die Behauptung sofort aus der Dimensionsformel für lineare Teileräume:

$$\dim(L_1 \vee L_2) = \dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2).$$

b) Sei nun  $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ . Wir überlegen uns zunächst, dass in diesem Fall  $\overrightarrow{p_1p_2} \notin U_1 + U_2$  ist. Andernfalls gäbe es  $u_i \in U_i$ , sodass  $p_2 - p_1 = u_1 + u_2$ . Das hieße aber

$$p_1 + u_1 = p_2 - u_2.$$

Der Punkt  $q := p_1 + u_1 = p_2 - u_2$  wäre also  $\in L_1 \cap L_2$ , im Widerspruch zur Annahme.

Es folgt:  $\text{lin}\{\overrightarrow{p_1p_2}\} \cap (U_1 + U_2) = \{o\}$ . Wir können nun wieder die Dimensionsformel für lineare Teileräume anwenden und erhalten:

$$\begin{aligned} \dim(L_1 \vee L_2) &= \dim(\text{lin}\{\overrightarrow{p_1p_2}\} + (U_1 + U_2)) = 1 + \dim(U_1 + U_2) = \\ &= 1 + \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2) = 1 + \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(U_1 \cap U_2). \end{aligned}$$

$\square$

Beispiele zum Fall  $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ :

a) Sei  $L_1$  eine Hyperebene des  $\mathbb{R}^d$  und  $L_2$  ein Punkt, der nicht auf  $L_1$  liegt. Dann ist

$$\dim(L_1 \vee L_2) = (d-1) + 0 - 0 + 1 = d,$$

also ist hier  $L_1 \vee L_2 = \mathbb{R}^d$ .

b) Seien  $L_1$  und  $L_2$  zwei einander nicht schneidende Geraden im  $\mathbb{R}^3$ . Die Dimension hängt hier von  $\dim(U_1 \cap U_2)$  ab:

Wenn  $U_1 \cap U_2 = \{o\}$  ist, dann spricht man von *windschiefen* Geraden. In diesem Fall ergibt sich  $\dim(L_1 \vee L_2) = 1 + 1 - 0 + 1 = 3$ , d.h.  $L_1 \vee L_2 = \mathbb{R}^3$ .

Wenn  $U_1 \cap U_2 \neq \{o\}$  ist, dann muss  $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$  sein, und wir erhalten  $\dim(L_1 \vee L_2) = 1 + 1 - 1 + 1 = 2$ . In diesem Fall ist  $U_1 = U_2$  (Satz 3.13), d.h. die beiden Geraden sind parallel, und der Verbindungsraum ist eine Ebene.  $\square$

Einige einfache Folgerungen aus der Dimensionsformel:

**Folgerung 3.41** Seien  $L_1 = p_1 + U_1$  und  $L_2 = p_2 + U_2$  parallele affine Teilmäume mit  $U_1 \subset U_2$ . Dann gilt

$$\dim(L_1 \vee L_2) = \begin{cases} \dim L_2 & \text{für } L_1 \cap L_2 \neq \emptyset, \\ \dim L_2 + 1 & \text{für } L_1 \cap L_2 = \emptyset. \end{cases}$$

*Beweis:* Für  $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$  können wir  $p \in L_1 \cap L_2$  wählen und sehen:  $L_1 \subset L_2$ , also  $L_1 \cap L_2 = L_1$ . Wegen  $U_1 \cap U_2 = U_1$  folgt die Behauptung also praktisch unmittelbar aus der allgemeinen Dimensionsformel.  $\square$

**Folgerung 3.42** Sei  $H$  eine Hyperebene von  $V$ , und  $L \neq \emptyset$  sei ein affiner Teilraum, der nicht zu  $H$  parallel ist. Dann ist  $H \cap L \neq \emptyset$  und  $H \vee L = V$ .

*Beweis:* Angenommen,  $H \cap L = \emptyset$ . Dann wäre

$$\dim(H \vee L) = d - 1 + \dim L - \dim(U_H \cap U_L) + 1,$$

wobei  $U_H$  bzw.  $U_L$  die zugehörigen Richtungsräume sind, und natürlich  $d = \dim V$ .

Wenn  $L$  nicht zu  $H$  parallel ist, so ist  $U_L$  nicht in  $U_H$  enthalten und daher  $U_L \cap U_H \subsetneq U_L$ . Somit ist  $\dim(U_L \cap U_H) < \dim U_L$  und daher  $\dim(H \vee L) > d - 1 + \dim L - \dim U_L + 1 = d$ . Das ist aber unmöglich.

Da  $L$  nicht in  $H$  enthalten ist, gilt  $H \subsetneq H \vee L$ . Daraus folgt  $d - 1 = \dim H < \dim(H \vee L) \leq d$  und daher  $\dim(H \vee L) = d$ .  $\square$

### 3.2.5 Hyperebenen von affinen Teilräumen

**Definition 3.43** Sei  $L$  ein affiner Teilraum des  $\mathbb{R}^d$  mit Dimension  $\geq 1$ , und  $U$  sei der zugehörige Richtungsraum. Dann verstehen wir unter einer **Hyperebene von  $L$**  eine Menge  $H$ , die sich folgenderweise darstellen lässt:  $H = \{x \in L : a \cdot x = \beta\}$  mit einem  $a \in U \setminus \{o\}$  und einem  $\beta \in \mathbb{R}$ .

Diese Definition ist insoferne sinnvoll, als folgendes gilt:

**Bemerkung 3.44** Jede Hyperebene eines  $s$ -dimensionalen affinen Teilraums  $L$  ist ein  $(s-1)$ -dimensionaler affiner Teilraum von  $L$ .

*Beweis:* Sei  $H = \{x \in L : a \cdot x = \beta\}$  und  $H' = \{x \in \mathbb{R}^d : a \cdot x = \beta\}$  mit  $a \in U \setminus \{o\}$ . Dann ist  $H = H' \cap L$  jedenfalls ein affiner Teilraum von  $\mathbb{R}^d$  und natürlich auch von  $L$ .

$H$  ist nicht leer: Sei  $p \in L$  beliebig. Dann können wir ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  so wählen, dass  $a \cdot (p + \lambda a) = \beta$ , nämlich  $\lambda = \frac{\beta - a \cdot p}{a \cdot a}$ . Dann gilt aber  $p + \lambda a \in H$ .

Nach der Dimensionsformel folgt somit  $\dim H = \dim H' + \dim L - \dim(H' \vee L)$ . Wenn wir zeigen können, dass  $\dim(H' \vee L) = d$  ist, dann folgt (wegen  $\dim H' = d-1$ ) sofort  $\dim H = \dim L - 1 = s-1$ , und wir sind fertig.

Auf Grund von Folgerung 3.14 müssen wir nur zeigen, dass es einen Punkt  $p \in L$  gibt, der nicht in  $H'$  liegt. (Dann folgt nämlich  $H' \subsetneq H' \vee L$ ). Betrachten wir dazu ein beliebiges  $q \in H$  und setzen  $p := q + a$ . Wäre  $p \in H'$ , dann müsste  $a \cdot p = \beta$  sein, d.h.  $a \cdot (q + a) = \beta$ . Wegen  $q \in H$  gilt aber  $a \cdot q = \beta$ , und daher würde  $a \cdot a = 0$  folgen, im Widerspruch zu  $a \neq o$ .  $\square$

Es gilt auch die Umkehrung:

**Bemerkung 3.45** Jeder  $(s-1)$ -dimensionale affine Teilraum eines  $s$ -dimensionalen affinen Teilraums  $L$  ist eine Hyperebene von  $L$  im oben definierten Sinn.

*Beweisidee:*  $L$  ist im Wesentlichen dasselbe wie der  $\mathbb{R}^s$  (siehe Satz 3.58), und im  $\mathbb{R}^s$  lässt sich jeder  $(s-1)$ -dimensionale Teilraum durch eine Gleichung der Form  $a \cdot x = \beta$  mit  $a \in \mathbb{R}^s \setminus \{o\}$  beschreiben.  $\square$

**Bemerkung 3.46** *Die Hyperebenen von  $L$  sind genau die Mengen der Gestalt  $H' \cap L$ , wobei  $H'$  eine Hyperebene des  $\mathbb{R}^d$  ist, welche nicht zu  $L$  parallel ist.*

*Beweis:* Dass sich jede Hyperebene von  $L$  so darstellen lässt, haben wir bereits beim Beweis von Bemerkung 3.44 gesehen.

Sei umgekehrt  $H'$  eine beliebige nicht zu  $L$  parallele Hyperebene des  $\mathbb{R}^d$ . Dann ist  $\dim(H' \cap L) = \dim H' + \dim L - \dim(H' \vee L) = d - 1 + \dim L - d = \dim L - 1$  (siehe Folgerung 3.42). Nach der vorhergenden Bemerkung ist also  $H' \cap L$  eine Hyperebene von  $L$ .

### 3.3 Affine Abbildungen

Wenn man vom Begriff "affiner Raum" ausgeht, wird man in natürlicher Weise auf folgende Definition von "affine Abbildung" geführt:

**Definition 3.47** *Seien  $A = (M, V, \Phi)$  und  $A' = (M', V', \Phi')$  affine Räume über demselben Körper  $K$ . Eine Abbildung  $\alpha : M \rightarrow M'$  heißt **affine Abbildung** von  $A$  nach  $A'$ , wenn es eine lineare Abbildung  $f : V \rightarrow V'$  gibt, sodass für beliebige Punkte  $P, Q \in M$  gilt:*

$$\Phi'(\alpha(P), \alpha(Q)) = f(\Phi(P, Q)).$$

Wir könnten die entscheidende Bedingung auch so schreiben:

$$\overrightarrow{\alpha(P) \alpha(Q)} = f(\overrightarrow{PQ}).$$

Das heißt also: eine affine Abbildung ist dadurch charakterisiert, dass in gewissem Sinne auf die Vektoren eine lineare Abbildung angewendet wird.

**Bemerkung 3.48** *Die zu einer affinen Abbildung gehörige lineare Abbildung ist eindeutig bestimmt.*

*Beweis:* Sei  $O$  ein fester Punkt in  $A = (M, V, \Phi)$  (der "Ursprung"). Zu jedem Vektor  $x \in V$  gibt es einen eindeutigen Punkt  $X \in M$ , sodass  $x = \overrightarrow{OX}$ . Daher muss  $f(x) = f(\overrightarrow{OX}) = \overrightarrow{\alpha(O)\alpha(X)}$  sein.  $\square$

Für Vektorräume wird der Begriff "affine Abbildung" normalerweise etwas anders definiert, nämlich als "lineare Abbildung plus eine Translation". Wir werden aber gleich sehen, dass das im Wesentlichen auf dasselbe hinauskommt.

**Satz 3.49** Seien  $V$  und  $V'$  zwei Vektorräume über demselben Körper und  $A, A'$  die entsprechenden affinen Räume. Eine Abbildung  $\alpha : V \rightarrow V'$  ist genau dann affin, wenn es eine lineare Abbildung  $f : V \rightarrow V'$  und einen Vektor  $b \in V'$  gibt, sodass

$$\alpha(x) = f(x) + b$$

für alle  $x \in V$ .

*Beweis:*

1. Sei  $\alpha : V \rightarrow V'$  eine affine Abbildung und  $f$  die gemäß Definition zugehörige lineare Abbildung. Dann gilt für jedes  $x \in V$ :  $\overrightarrow{\alpha(o) \alpha(x)} = f(\overrightarrow{o x})$ , und das heißt nichts anderes als  $\alpha(x) - \alpha(o) = f(x)$ . Mit  $b := \alpha(o)$  erhalten wir somit  $\alpha(x) = f(x) + b$ .
2. Sei umgekehrt  $\alpha(x) = f(x) + b$  für alle  $x \in V$  mit einer linearen Abbildung  $f$ . Dann ist

$$\overrightarrow{\alpha(p) \alpha(q)} = \alpha(q) - \alpha(p) = (f(q) + b) - (f(p) + b) = f(q) - f(p) = f(\overrightarrow{p q}) \text{ für beliebige Punkte } p, q \in V. \square$$

Zu jeder affinen Abbildung  $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  gibt es also eine reelle  $m \times n$ -Matrix  $A$  und einen Vektor  $b \in \mathbb{R}^m$ , sodass

$$\alpha(x) = Ax + b$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ . Daraus erkennen wir übrigens sofort die Richtigkeit der folgenden Bemerkung.

**Bemerkung 3.50** Jede affine Abbildung  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist stetig.

Der nächste Satz ist völlig analog zum entsprechenden Satz über lineare Abbildungen und folgt auch leicht daraus.

**Satz 3.51** Seien  $V, V'$  zwei Vektorräume über demselben Körper  $K$ . Eine Abbildung  $\alpha : V \rightarrow V'$  ist genau dann affin, wenn sie jede Affinkombination von endlich vielen Punkten aus  $V$  in die entsprechende Affinkombination der Bildpunkte überführt, d.h. wenn für beliebige  $p_1, \dots, p_n \in V$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  mit  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$  gilt:

$$\alpha \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha(p_i).$$

*Beweis:*

1. Sei  $\alpha : V \rightarrow V'$  affin;  $p_1, \dots, p_n \in V$ ;  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ ;  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ .

Mit  $\alpha(x) = f(x) + b$  sehen wir auf Grund der Linearität von  $f$  und wegen  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ :

$$\begin{aligned}\alpha\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i p_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i p_i\right) + b = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(p_i) + b = \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i f(p_i) + \sum_{i=1}^n \lambda_i b = \sum_{i=1}^n \lambda_i (f(p_i) + b) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha(p_i).\end{aligned}$$

2. Sei  $\alpha : V \rightarrow V'$  eine Abbildung mit der angegebenen Eigenschaft. Dann setzen wir  $f(x) := \alpha(x) - \alpha(o)$  (für alle  $x \in V$ ) und sehen:

$$\begin{aligned}f(x+y) &= \alpha(x+y) - \alpha(o) = \alpha(1x + 1y - 1o) - \alpha(o) = \\ &= 1\alpha(x) + 1\alpha(y) - 1\alpha(o) - \alpha(o) = f(x) + f(y).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(\lambda x) &= \alpha(\lambda x) - \alpha(o) = \alpha(\lambda x + (1-\lambda)o) - \alpha(o) = \\ &= \lambda\alpha(x) + (1-\lambda)\alpha(o) - \alpha(o) = \lambda(\alpha(x) - \alpha(o)) = \lambda f(x).\end{aligned}$$

Also ist  $f$  linear, und wegen  $\alpha(x) = f(x) + \alpha(o)$  ist  $\alpha$  eine affine Abbildung.

□

Auch der folgende Satz ist analog zu einem Satz über lineare Abbildungen.

**Satz 3.52** *Seien  $p_0, \dots, p_d$  affin unabhängige Punkte in einem  $d$ -dimensionalen Vektorraum  $V$  und  $p'_0, \dots, p'_d$  beliebige Punkte einem Vektorraum  $V'$  (wobei natürlich  $V$  und  $V'$  wieder über demselben Körper  $K$  definiert seien). Dann gibt es genau eine affine Abbildung  $\alpha : V \rightarrow V'$  mit*

$$\alpha(p_i) = p'_i \quad \text{für alle } i \in \{0, \dots, d\}.$$

*Beweis:*

1. Eindeutigkeit:

Angenommen, es gibt so eine affine Abbildung  $\alpha$ . Sei  $f$  die zugehörige lineare Abbildung. Dann ist  $f(p_i - p_0) = p'_i - p'_0$  für alle  $i \in \{1, \dots, d\}$ . Die Vektoren  $p_i - p_0$  bilden eine Basis von  $V$ , und daher ist  $f$  eindeutig bestimmt.

Sei nun  $\alpha(x) = f(x) + b$  für alle  $x \in V$ . Dann ist  $\alpha(p_0) = f(p_0) + b = p'_0$ , also ist  $b = p'_0 - f(p_0)$  ebenfalls eindeutig bestimmt.

2. Existenz:

Sei  $f$  die durch  $f(p_i - p_0) := p'_i - p'_0$  (für alle  $i \in \{1, \dots, d\}$ ) bestimmte lineare Abbildung, und  $b = p'_0 - f(p_0)$ .

Wir definieren nun  $\alpha(x) := f(x) + b$  für alle  $x \in V$ .

$\alpha$  ist jedenfalls eine affine Abbildung,

$$\alpha(p_0) = f(p_0) + b = f(p_0) + p'_0 - f(p_0) = p'_0,$$

$$\text{und } \alpha(p_i) = f(p_i) + p'_0 - f(p_0) = f(p_i - p_0) + p'_0 = p'_i - p'_0 + p'_0 = p'_i$$

für alle  $i \in \{1, \dots, d\}$ .  $\square$

### 3.3.1 Affinitäten und affine Invarianten

**Definition 3.53** Eine bijektive affine Abbildung  $\alpha$  eines affinen Raumes  $A$  auf einen affinen Raum  $A'$  über demselben Körper heißt **Affinität** von  $A$  auf  $A'$ . Im Spezialfall  $A = A'$  heißt  $\alpha$  auch kurz Affinität von  $A$ .

Eine Affinität von  $A$  auf  $A'$  ist nichts anderes als ein Isomorphismus der affinen Räume  $A$  und  $A'$  im Sinne von Definition 3.4. (Die dortige Abbildung  $\beta$  ist die zu  $\alpha$  gehörige lineare Abbildung.)

Eine Affinität eines Vektorraumes  $V$  ist daher offensichtlich eine Abbildung

$$\alpha : V \rightarrow V : x \mapsto f(x) + b$$

mit einer bijektiven linearen Abbildung  $f$  und einem Vektor  $b \in V$ . Die zu  $\alpha$  inverse Abbildung sieht so aus:

$$\alpha^{-1} : V \rightarrow V : x \mapsto f^{-1}(x - b) = f^{-1}(x) - f^{-1}(b).$$

Sie ist also auch wieder eine Affinität, und die zugehörige lineare Abbildung ist  $f^{-1}$ .

Für  $V = \mathbb{R}^d$  folgt daraus sofort, dass  $\alpha$  und  $\alpha^{-1}$  stetig sind (siehe Bemerkung 3.50), d.h.:

**Bemerkung 3.54** Jede Affinität des  $\mathbb{R}^d$  ist ein Homöomorphismus.

**Bemerkung 3.55** Die Affinitäten eines affinen Raums (oder eines Vektorraums) bilden in natürlicher Weise eine Gruppe.

*Beweis (für Vektorräume):* Wie wir soeben gesehen haben, ist die zu einer Affinität inverse Abbildung ist ebenfalls eine Affinität, und die Zusammensetzung zweier Affinitäten ist auch wieder eine Affinität: Sei  $\alpha : x \mapsto f(x) + b$  und  $\alpha' : x \mapsto f'(x) + b'$ . Dann ist

$$\alpha \circ \alpha' : x \mapsto f(f'(x) + b') + b = (f \circ f')(x) + (f(b') + b).$$

Der Zusammensetzung zweier affiner Abbildungen entspricht also die Zusammensetzung der zugehörigen linearen Abbildungen.

In Sinne von Felix Klein besteht nun die *affine Geometrie* aus dem Studium der *affinen Invarianten*, das sind mathematische Eigenschaften, Objekte oder Größen, die bezüglich Affinitäten invariant sind. Wir sehen uns im Folgenden einige solche Invarianten etwas näher an.

**Satz 3.56** *Die Eigenschaft "affiner Teilraum" und die Dimension sind affine Invarianten.*

*Beweis (für Vektorräume):* Sei  $L$  ein affiner Teilraum von  $V$  und  $\alpha : V \rightarrow V : x \mapsto f(x) + b$  eine Affinität von  $V$ . Wir haben zu zeigen, dass  $\alpha(L)$  ein affiner Teilraum von  $V$  mit der gleichen Dimension wie  $L$  ist.

Sei  $L = p + U$ . Dann ist  $\alpha(L) = f(L) + b = f(U) + f(p) + b$ .

$\alpha(L)$  ist also ein affiner Teilraum mit  $f(U)$  als zugehörigem linearen Teilraum.

Bekanntlich bildet eine bijektive lineare Abbildung lineare Teileräume auf lineare Teileräume gleicher Dimension ab, und damit ist schon alles klar.  $\square$

**Satz 3.57** *Das Teilverhältnis ist eine affine Invariante.*

*Beweis:* Seien  $p, q, x$  drei Punkte auf einer Geraden ( $p \neq q$ ) mit  $TV(p, q, x) = \lambda$ , und  $\alpha$  eine Affinität. Dann liegen auf Grund des vorigen Satzes auch  $\alpha(p)$ ,  $\alpha(q)$  und  $\alpha(x)$  auf einer Geraden, und wegen der Bijektivität von  $\alpha$  ist  $\alpha(p) \neq \alpha(q)$ .

$x = (1 - \lambda)p + \lambda q$ , also gilt nach Satz 3.51:  $\alpha(x) = \alpha((1 - \lambda)p + \lambda q) = (1 - \lambda)\alpha(p) + \lambda\alpha(q)$ , somit ist  $TV(\alpha(p), \alpha(q), \alpha(x)) = \lambda$ .  $\square$

Schließlich überlegen wir uns noch, dass im Sinne der affinen Geometrie jeder  $s$ -dimensionale affine Teilraum des  $\mathbb{R}^d$  isomorph zum  $\mathbb{R}^s$  ist. Genauer:

**Satz 3.58** Sei  $L$  ein  $s$ -dimensionaler affiner Teilraum des  $\mathbb{R}^d$ . Dann gibt es eine Affinität von  $L$  auf  $\mathbb{R}^s$  (und umgekehrt).

*Beweis:* Sei  $p \in L$ . Es gibt  $s$  linear unabhängige Vektoren  $u_1, \dots, u_s \in \mathbb{R}^d$ , sodass

$$L = \{p + \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_s u_s : \lambda_i \in \mathbb{R}\}.$$

Die Abbildung

$$\alpha : \mathbb{R}^s \rightarrow L : (\lambda_1, \dots, \lambda_s) \mapsto p + \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_s u_s$$

ist offensichtlich bijektiv, und es handelt sich um eine affine Abbildung, denn die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^d : (\lambda_1, \dots, \lambda_s) \mapsto \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_s u_s$$

ist linear. (Die zugehörige Matrix hat die Spaltenvektoren  $u_1, \dots, u_s$ .)  $\square$

### 3.3.2 Parallelprojektionen

Es handelt sich hier um eine einfache, aber insbesondere auch für Anwendungen wichtige Klasse von affinen Abbildungen.

**Hilfssatz 3.59** Sei  $H$  eine Hyperebene des  $\mathbb{R}^d$ , und  $v$  ein Vektor, welcher nicht im Richtungsraum von  $H$  enthalten ist. Dann gibt es zu jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}^d$  genau einen Punkt  $x' \in H$ , sodass  $x - x' \in \text{lin}\{v\}$ .

*Beweis:* Sei  $H = p + U$  mit einem  $(d-1)$ -dimensionalen linearen Teilraum  $U$  des  $\mathbb{R}^d$ . Sei  $u_1, \dots, u_{d-1}$  eine Basis von  $U$ . Da  $v \notin U$ , sind die Vektoren  $u_1, \dots, u_{d-1}, v$  linear unabhängig. Zu jedem  $x \in \mathbb{R}^d$  gibt es also eindeutig bestimmte reelle Zahlen  $\lambda_1, \dots, \lambda_{d-1}, \lambda_d$ , sodass  $x - p = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{d-1} u_{d-1} + \lambda_d v$ . Damit folgt schon die Behauptung mit  $x' = p + \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{d-1} u_{d-1}$ .

**Definition 3.60** Die Abbildung  $\pi_{H,v} : \mathbb{R}^d \rightarrow H : x \mapsto x'$ , wobei  $x'$  gemäß obigem Hilfssatz bestimmt ist, heißt die **Parallelprojektion** auf die Hyperebene  $H$  in Richtung  $v$ .

**Satz 3.61** Die Parallelprojektionen sind affine Abbildungen.

*Beweis:* Mit obigen Bezeichnungen ist die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^d \rightarrow U : \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{d-1} u_{d-1} + \lambda_d v \mapsto \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{d-1} u_{d-1}$$

eine lineare Abbildung. Die Additivität sieht man z.B. so:

$$\begin{aligned} f((\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{d-1} u_{d-1} + \lambda_d v) + (\mu_1 u_1 + \dots + \mu_{d-1} u_{d-1} + \mu_d v)) &= \\ = f((\lambda_1 + \mu_1) u_1 + \dots + (\lambda_{d-1} + \mu_{d-1}) u_{d-1} + (\lambda_d + \mu_d) v) &= \\ = (\lambda_1 + \mu_1) u_1 + \dots + (\lambda_{d-1} + \mu_{d-1}) u_{d-1} &= \\ = f(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{d-1} u_{d-1} + \lambda_d v) + f(\mu_1 u_1 + \dots + \mu_{d-1} u_{d-1} + \mu_d v). \end{aligned}$$

Es gilt  $\pi_{H,v}(x) = f(x - p) + p = f(x) - f(p) + p$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$ , also ist  $\pi_{H,v}$  eine affine Abbildung.  $\square$

*Bemerkung:* Wenn man  $f$  als lineare Abbildung  $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  auffasst, so sieht die Matrix von  $f$  bezüglich der Basis  $B = (u_1, \dots, u_{d-1}, v)$  so aus:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Es gilt ja  $f(u_i) = u_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, d-1\}$  und  $f(v) = o$ .)

So eine Parallelprojektion lässt sich also ganz einfach berechnen: Man erhält das Bild eines Punktes  $x$  bezüglich der Basis  $B$  dadurch, dass man vom Koordinatenvektor  $(x - p)_B$  die letzte Koordinate Null setzt und dann  $p_B$  addiert. Die wesentliche Rechenarbeit besteht in der Berechnung der Koordinaten von  $x - p$  bezüglich der Basis  $B$ . Das kann man z.B. so machen:

$$(x - p)_B = B^{-1}(x - p),$$

wenn wir die Basis  $B$  mit der Matrix mit den Spaltenvektoren  $u_1, \dots, u_{d-1}, v$  identifizieren. Die gesamte Rechnung sieht dann so aus:

$$\pi_{H,v}(x) = B P B^{-1}(x - p) + p.$$

Auf diese Art und Weise kann man z.B. Computer-Bildschirmdarstellungen von dreidimensionalen Objekten berechnen.

In der Darstellenden Geometrie werden durch Parallelprojektionen erzeugte Bilder *Schrägrisse* genannt. Je nachdem, welche Projektionsrichtung man

wählt, wirken die Bilder mehr oder weniger verzerrt. Natürlichere Bilder erhält man mit *Normalprojektionen*, das sind spezielle Parallelprojektionen  $\pi_{H,v}$ , bei denen der Richtungsvektor  $v$  auf  $H$  senkrecht steht. Noch bessere Bilder bekommt man unter Umständen mit *Zentralprojektionen*, die in der projektiven Geometrie behandelt werden.

## 3.4 Konvexe Mengen

Konvexe Mengen spielen in verschiedenen Teil- und Anwendungsgebieten der Mathematik eine besondere Rolle, insbesondere in Funktionalanalysis und Optimierung. Sie sind nur in reellen affinen Räume definiert. Wir betrachten daher vor allem den  $\mathbb{R}^d$ .

### 3.4.1 Grundlegende Begriffe und Sätze

**Definition 3.62** Unter der offenen bzw. abgeschlossenen **Verbindungsstrecke** (engl. **straight line segment**) zweier Punkte  $p, q$  des  $\mathbb{R}^d$  versteht man die Menge

$$]p, q[ := \{(1 - \lambda)p + \lambda q : 0 < \lambda < 1\}.$$

bzw.

$$[p, q] := \{(1 - \lambda)p + \lambda q : 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Die offene Verbindungsstrecke von  $p$  und  $q$  besteht also aus allen Punkten, die zwischen  $p$  und  $q$  liegen, und bei der abgeschlossenen Verbindungsstrecke kommen noch die *Endpunkte*  $p$  und  $q$  dazu.

Die Verbindungsstrecke zweier Punkte ist offensichtlich eine Teilmenge der Verbindungsgeraden dieser Punkte.

**Bemerkung 3.63** Das Bild der Verbindungsstrecke zweier Punkte  $p, q$  unter einer affinen Abbildung  $\alpha$  ist gleich der Verbindungsstrecke der Bildpunkte  $\alpha(p), \alpha(q)$ .

(Das ist eine einfache Folgerung aus Satz 3.51.)

**Definition 3.64** Eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^d$  heißt **konvex**, wenn sie mit je zwei Punkten auch deren Verbindungsstrecke enthält.

(Hier ist es offensichtlich egal, ob man die offene oder abgeschlossene Verbindungsstrecke nimmt.)

**Bemerkung 3.65** Auf Grund der Bemerkung 3.63 ist Konvexität eine affine Invariante.

Beispiele für konvexe Mengen:

- a) Jeder affine Teilraum des  $\mathbb{R}^d$  ist konvex, da er mit je zwei Punkten sogar die ganze Verbindungsgerade enthält. Insbesondere ist also jede Hyperebene  $H = \{x \in \mathbb{R}^d : a \cdot x = \beta\}$  konvex (mit Normalvektor  $a \neq 0$ ).
- b) Die (offene oder abgeschlossene) Verbindungsstrecke zweier Punkte ist konvex. (Übungsaufgabe)
- c) Sei  $p \in \mathbb{R}^d$  und  $\varepsilon > 0$ . Dann nennt man

$$K(p, \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - p\| < \varepsilon\}$$

die *offene Kugel* und

$$\overline{K}(p, \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - p\| \leq \varepsilon\}$$

die *abgeschlossene Kugel* mit Mittelpunkt  $p$  und Radius  $\varepsilon$ . Beide Mengen sind konvex. (Für  $d = 2$  sagt man statt Kugel auch *Kreis* oder genauer *Kreisscheibe*.)

*Beweis* (z.B. für die offene Kugel):

Seien  $x, y \in K(p, \varepsilon)$  und  $\lambda \in [0, 1]$ . Dann gilt auf Grund der Dreiecksungleichung:

$$\|(1 - \lambda)x + \lambda y - p\| = \|(1 - \lambda)(x - p) + \lambda(y - p)\| \leq (1 - \lambda)\|x - p\| + \lambda\|y - p\| < (1 - \lambda)\varepsilon + \lambda\varepsilon = \varepsilon. \square$$

**Bemerkung 3.66** Sei  $C$  eine abgeschlossene beschränkte konvexe Teilmenge des  $\mathbb{R}^d$  mit Dimension 1. Dann ist  $C$  die abgeschlossene Verbindungsstrecke zweier Punkte.

*Beweis:* Die affine Hülle von  $C$  ist eine Gerade  $G$ . Sei  $x = p + \lambda u$  die Parameterdarstellung von  $G$ . Da  $C$  beschränkt ist, sind  $\lambda_0 := \inf\{\lambda : p + \lambda u \in C\}$  und  $\lambda_1 := \sup\{\lambda : p + \lambda u \in C\}$  reelle Zahlen. Da  $C$  abgeschlossen ist,

sind  $a := p + \lambda_0 u$  und  $b := p + \lambda_1 u$  Elemente von  $C$ . Wegen der Konvexität von  $C$  folgt  $[a, b] \subset C$ .

$$\begin{aligned} \text{Nun ist } [a, b] &= \{(1 - \mu)(p + \lambda_0 u) + \mu(p + \lambda_1 u) : 0 \leq \mu \leq 1\} = \\ &= \{p + (\lambda_0 + \mu(\lambda_1 - \lambda_0))u : 0 \leq \mu \leq 1\} = \{p + \lambda u : \lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1\}. \end{aligned}$$

Aus dieser Darstellung sehen wir, dass kein Punkt der Geraden  $G$  außerhalb von  $[a, b]$  zu  $C$  gehören kann, also ist  $[a, b] = C$ .  $\square$

Weitere wichtige konvexe Mengen sind die folgenderweise definierten Halbräume:

**Definition 3.67** Sei  $a \in \mathbb{R}^d \setminus \{o\}$  und  $\beta \in \mathbb{R}$ . Dann heißen

$$H^+ := \{x \in \mathbb{R}^d : a \cdot x > \beta\}$$

und

$$H^- := \{x \in \mathbb{R}^d : a \cdot x < \beta\}$$

die beiden zu der Hyperebene  $H = \{x \in \mathbb{R}^d : a \cdot x = \beta\}$  gehörigen **offenen Halbräume**. Ersetzt man die Ungleichheitszeichen durch  $\geq$  bzw.  $\leq$ , so erhält man die zu  $H$  gehörigen **abgeschlossenen Halbräume**  $\overline{H^+}$  und  $\overline{H^-}$ .

(Für  $d = 2$  spricht man auch von *Halbebenen*, für  $d = 1$  von *Halbgeraden*.)

*Bemerkung:* Durch die Menge  $H$  selbst ist noch nicht festgelegt, welcher der beiden zugehörigen (offenen) Halbräume  $H^+$  und welcher  $H^-$  ist. Das geschieht erst durch die Angabe eines Normalvektors (oder durch eine dazu äquivalente Angabe, z.B. durch einen Punkt aus  $H^+$ ).

Offene und abgeschlossene Halbräume sind tatsächlich konvexe Mengen:

*Beweis* (z.B. für  $H^+$ ): Seien  $x, y \in H^+ = \{x \in \mathbb{R}^d : a \cdot x > \beta\}$  und  $\lambda \in [0, 1]$ . Dann ist

$$a \cdot ((1 - \lambda)x + \lambda y) = (1 - \lambda)a \cdot x + \lambda a \cdot y > (1 - \lambda)\beta + \lambda\beta = \beta, \text{ also } (1 - \lambda)x + \lambda y \in H^+. \square$$

*Bemerkung:* Jedem Vektor  $a \in \mathbb{R}^d$  entspricht umkehrbar eindeutig ein lineares Funktional, nämlich

$$f_a : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto a \cdot x.$$

Wir werden daher Hyperebenen manchmal auch in der Form  $H = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) = \beta\}$  mit einem linearen Funktional  $f \neq o$  schreiben (und analog Halbräume).

**Bemerkung 3.68** Halbräume eines affinen Teilraums  $L$  des  $\mathbb{R}^d$  werden durch  $H^+ = \{x \in L : a \cdot x > \beta\}$  usw. definiert, und es gilt: Die Halbräume von  $L$  sind genau die Durchschnitte von Halbräumen des  $\mathbb{R}^d$  mit  $L$ , sofern deren begrenzende Hyperebenen nicht parallel zu  $L$  sind.

(Vgl. Abschnitt 3.2.5.)

**Satz 3.69** Der Durchschnitt von beliebig vielen konvexen Mengen ist wieder konvex.

*Beweis:* Für alle Indizes  $i$  aus einer beliebigen (endlichen, abzählbaren oder überabzählbaren) Menge  $I$  sei  $C_i$  konvex. Wir überlegen uns, dass dann auch

$$C := \bigcap_{i \in I} C_i$$

konvex ist. Seien  $p, q \in C$  und  $\lambda \in [0, 1]$ . Dann gilt  $p \in C_i$  und  $q \in C_i$  für alle  $i \in I$ , und daher  $(1 - \lambda)p + \lambda q \in C_i$  für alle  $i \in I$ . Also ist  $(1 - \lambda)p + \lambda q \in C$ .  $\square$

**Definition 3.70** Eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^d$ , die man als Durchschnitt von endlich vielen abgeschlossenen Halbräumen darstellen kann, nennen wir eine **polyedrische Menge**.

Abgeschlossene Halbräume sind also Spezialfälle von polyedrischen Mengen. Der Durchschnitt von zwei abgeschlossenen Halbräumen wird manchmal *Winkelbereich* genannt.

**Definition 3.71** Sei  $S \subset \mathbb{R}^d$ . Der Durchschnitt aller  $S$  enthaltenden konvexen Teilmengen von  $\mathbb{R}^d$  heißt die **konvexe Hülle** von  $S$ . Bezeichnung:  $\text{conv } S$ .

$\text{conv } S$  ist also die kleinste  $S$  enthaltende konvexe Menge.

Beispiel:  $[p, q] = \text{conv}\{p, q\}$ .

**Definition 3.72** Seien  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}^d$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  mit  $\lambda_i \geq 0$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  und  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ . Dann heißt

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i p_i$$

eine **Konvexitätskombination** von  $p_1, \dots, p_n$ .

Für diese  $\lambda_i$  gilt natürlich  $0 \leq \lambda_i \leq 1$ . Es wird nicht vorausgesetzt, dass  $p_1, \dots, p_n$  paarweise verschieden sind.

Konvexitätskombinationen sind also spezielle Affinkombinationen.

**Bemerkung 3.73** Auf Grund von Satz 3.51 sehen wir: Das Bild einer Konvexitätskombination von  $p_1, \dots, p_n$  unter einer affinen Abbildung  $\alpha$  ist eine Konvexitätskombination der Bildpunkte  $\alpha(p_1), \dots, \alpha(p_n)$ , und zwar mit denselben Koeffizienten  $\lambda_i$ .

**Satz 3.74** Eine konvexe Menge enthält mit je endlich vielen Punkten auch alle Konvexitätskombinationen dieser Punkte.

*Beweis:*

Wir betrachten  $n$  Punkte einer konvexen Menge  $C$ .

Die Fälle  $n = 1$  und  $n = 2$  sind trivial, und der Induktionsschluss von  $n$  auf  $n + 1$  verläuft (für  $n \geq 2$ ) so:

Seien  $p_1, \dots, p_{n+1} \in C$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$  mit  $\lambda_i \geq 0$  für alle  $i \in \{1, \dots, n+1\}$  und  $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ .

Da nicht alle  $\lambda_i = 1$  sind, können wir o.B.d.A. annehmen, dass  $\lambda_{n+1} \neq 1$  ist und daher  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$ .

Setzen wir

$$\alpha_k := \frac{\lambda_k}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} = \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{n+1}}$$

für  $k \in \{1, \dots, n\}$ , so sehen wir, dass  $\alpha_k \geq 0$  und  $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$  ist. Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$p := \sum_{k=1}^n \alpha_k p_k \in C,$$

und daher  $(1 - \lambda_{n+1})p + \lambda_{n+1}p_{n+1} \in C$ , das heißt aber

$$(1 - \lambda_{n+1}) \sum_{k=1}^n \alpha_k p_k + \lambda_{n+1} p_{n+1} = \sum_{k=1}^n \lambda_k p_k + \lambda_{n+1} p_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k p_k \in C.$$

□

**Folgerung 3.75** Eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^d$  ist genau dann konvex, wenn sie mit je endlich vielen Punkten auch alle Konvexitätskombinationen dieser Punkte enthält.

**Satz 3.76** Die konvexe Hülle einer Teilmenge  $S$  des  $\mathbb{R}^d$  ist gleich der Menge aller Konvexitätskombinationen von je endlich vielen Punkten aus  $S$ .

Der *Beweis* ist sehr ähnlich zu dem des entsprechenden Satzes über die affine Hülle (Satz 3.32):

Sei  $K$  die Menge aller Konvexitätskombinationen von je endlich vielen Punkten aus  $S$ .

Nach Satz 3.74 ist  $K \subset \text{conv } S$ .

Nun ist aber  $S \subset K$ , denn jedes Element von  $S$  kann als Konvexitätskombination von sich selbst aufgefasst werden:  $p = 1p$ . Für die Umkehrung genügt es daher, zu zeigen, dass  $K$  konvex ist. (Denn dann folgt:  $\text{conv } S \subset K$ ).

Seien  $x, y \in K$ , d.h.  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i$  und  $y = \sum_{i=n+1}^m \alpha_i p_i$  mit  $p_i \in S$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=n+1}^m \alpha_i = 1$ . Dann ist für  $0 \leq \lambda \leq 1$

$$(1 - \lambda)x + \lambda y = \sum_{i=1}^n (1 - \lambda)\alpha_i p_i + \sum_{i=n+1}^m \lambda\alpha_i p_i \in K,$$

denn die auftretenden Koeffizienten sind alle nichtnegativ, und ihre Summe ist gleich 1 (vgl. Beweis von Satz 3.32).  $\square$

**Definition 3.77** Unter einem **konvexen Polytop** versteht man die konvexe Hülle von endlich vielen Punkten (im  $\mathbb{R}^d$ ). 2- bzw. 3-dimensionale konvexe Polytope heißen auch **konvexe Polygone** bzw. **konvexe Polyeder**. Statt "r-dimensionales konvexes Polytop" sagt man auch kurz "**r-Polytop**".

Es gibt einen wichtigen Zusammenhang zwischen konvexen Polytopen und polyedrischen Mengen, der aber nicht ganz einfach zu beweisen ist: Konvexe Polytope sind genau die beschränkten polyedrischen Mengen (siehe Kapitel 3.4.6).

Besonders einfache und wichtige Polytope sind die Simplizes:

**Definition 3.78** Unter einem r-dimensionalen **Simplex** (kurz **r-Simplex**) versteht man die konvexe Hülle von  $r + 1$  affin unabhängigen Punkten (im  $\mathbb{R}^d$ ).

*Beispiele:*

- a) Eine einpunktige Menge ist ein 0-dimensionales Simplex.
- b) Die Verbindungsstrecke von zwei verschiedenen Punkten ist ein 1-dimensionales Simplex.
- c) Ein 2-dimensionales Simplex ist nichts anderes als ein *Dreieck*.
- d) Die 3-dimensionale Simplizes heißen auch *Tetraeder*.

### 3.4.2 Kombinatorische Sätze über konvexe Mengen

**Satz 3.79** (Satz von Radon, 1921) *Sei  $M$  eine endliche Menge von mindestens  $d + 2$  Punkten im  $\mathbb{R}^d$ . Dann gibt es zwei disjunkte Teilmengen von  $M$ , deren konvexe Hüllen nicht disjunkt sind.*

(*Johann Radon* (1887 - 1956) ist ein "Alt-Österreicher". Er stammt aus Böhmen, studierte in Wien und unterrichtete dann an verschiedenen deutschen Universitäten. 1928 wurde er Professor in Breslau (Wrocław) im heutigen Polen, 1947 wurde er an die Technische Hochschule Wien berufen. Seine Arbeiten betreffen vor allem die Variationsrechnung und Funktionalanalysis. Eine nach ihm benannte Integraltransformation (die *Radon-Transformation*) bildet die mathematische Grundlage für die besonders in der Medizin wichtige Computer-Tomographie.)

*Beweis:*

Sei  $M = \{q_1, \dots, q_n\}$  mit  $n \geq d + 2$ . Die Punkte  $q_1, \dots, q_n$  sind dann affin abhängig. Also gibt es reelle Zahlen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , nicht alle gleich Null, sodass  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$  und  $\sum_{i=1}^n \lambda_i q_i = o$ . Es muss positive und negative  $\lambda_i$  geben. Bezeichnen wir mit  $p$  die Anzahl der positiven  $\lambda_i$ , so können wir die Nummerierung so wählen, dass

$$\lambda_1, \dots, \lambda_p > 0 \quad \text{und} \quad \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n \leq 0.$$

Es folgt:

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i q_i = \sum_{i=p+1}^n |\lambda_i| q_i. \quad (3.1)$$

Wegen  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$  gilt:

$$\sigma := \sum_{i=1}^p \lambda_i = \sum_{i=p+1}^n |\lambda_i|.$$

Mit  $\alpha_i := \frac{\lambda_i}{\sigma}$  folgt daher  $\sum_{i=1}^p \alpha_i = \sum_{j=p+1}^n |\alpha_j| = 1$ . Sei nun

$$z := \sum_{i=1}^p \alpha_i q_i = \sum_{i=p+1}^n |\alpha_i| q_i.$$

Wir sehen:  $z \in \text{conv}\{q_1, \dots, q_p\} \cap \text{conv}\{q_{p+1}, \dots, q_n\}$ .  $\square$

Wenn  $M = U \cup V$  mit  $U \cap V = \emptyset$  und  $U \neq \emptyset$ ,  $V \neq \emptyset$ , so sagen wir:  $\{U, V\}$  ist eine *Partition von  $M$  (in zwei Teile)*. Wir können dann den Satz von Radon auch so formulieren:

**Folgerung 3.80** *Zu jeder endlichen Teilmenge  $M$  des  $\mathbb{R}^d$  mit mindestens  $d+2$  Punkten gibt es eine Partition von  $M$  in zwei Teile  $U, V$ , deren konvexe Hüllen nicht disjunkt sind.*

**Definition 3.81** *Eine solche Partition heißt **Radon-Partition** von  $M$ . Im Gegensatz dazu heißt eine Partition von  $M$  in zwei Teile mit disjunkten konvexen Hüllen **non-Radon-Partition**. Die beiden Teile einer non-Radon-Partition heißen **Semiräume**.*

(Semiräume dürfen nicht mit Halbräumen verwechselt werden!)

*Beispiele:*

- Die konvexe Hülle von vier Punkten in der Ebene, von denen keine drei auf einer Geraden liegen, ist entweder ein Viereck oder ein Dreieck. Im ersten Fall bilden die Paare diagonal gegenüberliegender Ecken eine Radonpartition, im anderen Fall können wir für  $U$  die Ecken des Dreiecks nehmen und für  $V$  die Menge, die nur aus dem vierten Punkt besteht. Alle anderen Partitionen sind non-Radon.
- Eine Radon-Partition der Ecken einer  $n$ -seitigen (konvexen) Doppelpyramide erhält man z.B., wenn man für  $U$  die  $n$  Basisecken wählt und für  $V$  die beiden Spitzen.
- Bei den Ecken eines konvexen  $n$ -Ecks (mit  $n > 3$ ) sind die Semiräume genau die Mengen von  $k$  aufeinanderfolgenden Ecken, mit  $1 \leq k \leq n-1$ . Jede andere Teilmenge bildet zusammen mit ihrem Komplement eine Radon-Partition. Es gibt somit für jedes  $k$  genau  $n$   $k$ -elementige Semiräume (auch  $k$ -sets genannt). Die Anzahl der Semiräume mit höchstens  $m$  Elementen beträgt hier also  $mn$ , und man kann zeigen, dass diese Anzahl für  $m < n/2$  das Maximum darstellt, d.h. für jede beliebige Menge von  $n$  Punkten in

der Ebene gibt es höchstens  $mn$  Semiräume mit höchstens  $m$  Elementen (für  $1 \leq m < n/2$ ) (siehe z.B. [1]). Die entsprechende Frage in höherdimensionalen Räumen ist derzeit noch ungeklärt, es gibt aber eine sehr plausible Vermutung (siehe 3.166). Der Fall  $m = n/2$  scheint auch in der Ebene noch ungelöst zu sein.

**Satz 3.82** (Satz von Carathéodory, 1911) *Sei  $S \subset \mathbb{R}^d$ . Jeder Punkt der konvexen Hülle von  $S$  kann als Konvexitätskombination von  $d + 1$  oder weniger Punkten von  $S$  dargestellt werden.*

(Von *Constantin Carathéodory* (1873 - 1950, Berlin, Brüssel, Bonn, Hannover, Breslau, Göttingen, Athen, München) stammen wichtige Beiträge zu verschiedenen Teilgebieten der Mathematik, z.B. Variationsrechnung, Maßtheorie, Funktionentheorie, partielle Differentialgleichungen.)

Wir könnten den obigen Satz auch so ausdrücken: Jeder Punkt der konvexen Hülle von  $S$  liegt in einem Simplex, dessen Ecken zu  $S$  gehören.

*Beweis:*

Sei  $x \in \text{conv } S$ . Dann gibt es (nach Satz 3.76)  $q_1, \dots, q_n \in S$  und  $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$ , sodass  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$  und  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i q_i$ . (Eventuell zunächst auftretende  $\alpha_i$ , welche  $= 0$  sind, können ja weggelassen werden.) Wir nehmen nun an, dass  $n$  die kleinste natürliche Zahl ist, zu der es eine solche Darstellung von  $x$  gibt, und dass  $n \geq d + 2$  ist. Dann gibt es nach dem Satz von Radon (nach eventueller Umnummerierung) eine Zahl  $p$  mit  $1 \leq p \leq n - 1$  und ein  $z \in \text{conv}\{q_1, \dots, q_p\} \cap \text{conv}\{q_{p+1}, \dots, q_n\}$ . Das heißt, es gibt  $\lambda_1, \dots, \lambda_p > 0$  und  $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n \leq 0$ , mit  $\sum_{i=1}^p \lambda_i = \sum_{i=p+1}^n |\lambda_i| = 1$  (und daher  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ ), sodass  $z = \sum_{i=1}^p \lambda_i q_i = \sum_{i=p+1}^n |\lambda_i| q_i$ , und somit  $\sum_{i=1}^n \lambda_i q_i = o$ . Wir können die Nummerierung außerdem so wählen, dass

$$\frac{\alpha_p}{\lambda_p} = \min \left\{ \frac{\alpha_1}{\lambda_1}, \dots, \frac{\alpha_p}{\lambda_p} \right\}. \quad (3.2)$$

Sei nun  $\gamma_i := \alpha_i - \frac{\alpha_p}{\lambda_p} \lambda_i$ . Dann sind alle  $\gamma_i \geq 0$ : Für  $1 \leq i \leq p$  folgt das aus (3.2), und für  $i > p$  aus  $\lambda_i \leq 0$ . Insbesondere ist  $\gamma_p = 0$ , und wir sehen (wegen  $\sum \alpha_i = 1$  und  $\sum \lambda_i = 0$ ):

$$\sum_{i \neq p} \gamma_i = \sum \gamma_i = \sum \alpha_i - \frac{\alpha_p}{\lambda_p} \sum \lambda_i = 1.$$

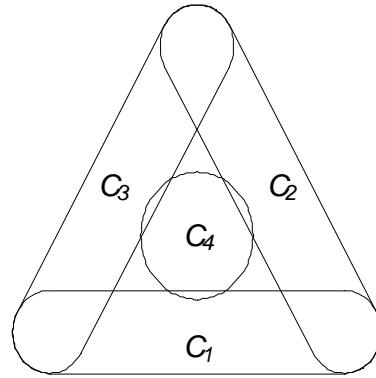
$\sum_{i \neq p} \gamma_i q_i$  ist daher eine Konvexitätskombination, und es gilt (wegen  $\sum_{i=1}^n \lambda_i q_i = o$ ):

$$\sum_{i \neq p} \gamma_i q_i = \sum_{i=1}^n \gamma_i q_i = \sum_{i=1}^n \left( \alpha_i - \frac{\alpha_p}{\lambda_p} \lambda_i \right) q_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i q_i = x.$$

Wir haben somit  $x$  als Konvexitätskombination von weniger als  $n$  Punkten aus  $S$  dargestellt, im Widerspruch zur vorausgesetzten Minimalität von  $n$ .  $\square$

Der Satz von Carathéodory besagt also, dass man die konvexe Hülle einer Teilmenge  $S$  des  $\mathbb{R}^d$  stets als Vereinigung von Simplizes mit Ecken aus  $S$  (und Dimension  $\leq d$ ) darstellen kann. Wenn  $S$  eine endliche Menge ist, welche nicht in einer Hyperebene enthalten ist, dann ist  $P := \text{conv } S$  ein  $d$ -dimensionales konvexes Polytop. Für diesen Fall kann man zeigen, dass  $P$  sogar als Vereinigung von  $d$ -dimensionalen Simplizes darstellbar ist, welche paarweise keine inneren Punkte gemeinsam haben. Eine solche Darstellung heißt *Triangulation* von  $P$ . Triangulationen spielen insbesondere in der Computergeometrie eine bedeutende Rolle (siehe Kapitel 4.4.3).

Die folgende Abbildung zeigt vier konvexe Teilmengen der Ebene, von denen je *zwei* nicht leeren Durchschnitt haben. Der Durchschnitt aller vier Teilmengen ist aber leer.



Gibt es vier konvexe Mengen, sodass je *drei* nicht leeren Durchschnitt haben und trotzdem der Durchschnitt von allen vier leer ist? Der folgende Satz gibt eine Antwort darauf.

**Satz 3.83** (Satz von Helly, 1913) *Sei  $\mathcal{F}$  eine endliche Familie von mindestens  $d + 1$  konvexen Mengen im  $\mathbb{R}^d$ , sodass je  $d + 1$  Mengen aus  $\mathcal{F}$  nicht leeren Durchschnitt haben. Dann ist der Durchschnitt aller Mengen aus  $\mathcal{F}$  nicht leer.*

(*Eduard Helly* (1884 - 1943) stammt aus Wien, wo er auch sein Studium absolvierte, und ging dann nach Göttingen, wo er Hilbert, Klein und Minkowski kennenlernte. 1908 kam er zurück nach Wien, fand aber keine Anstellung an der Universität. In dieser Zeit beschäftigte er sich mit Funktionalanalysis und fand unter anderem einen Beweis des Satzes von Hahn-Banach (siehe Kapitel 1.3 und Satz 3.103), 15 Jahre vor Hahn und 20 Jahre vor Banach. Wegen seiner jüdischen Herkunft musste er 1938 in die USA emigrieren.)

*Beweis* mit Induktion nach der Anzahl  $n$  der Mengen in  $\mathcal{F}$ :

Der Induktionsanfang  $n = d + 1$  ist trivial.

Nehmen wir nun an, dass der Satz für alle Familien mit  $n - 1$  Mengen im  $\mathbb{R}^d$  bewiesen ist, wobei  $n - 1 \geq d + 1$ , d.h.  $n \geq d + 2$ .

Sei nun  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$  eine Familie von  $n$  konvexen Mengen im  $\mathbb{R}^d$ , sodass je  $d + 1$  Mengen aus  $\mathcal{C}$  nicht leeren Durchschnitt haben. Dann haben nach Induktionsvoraussetzung auch je  $n - 1$  Mengen aus  $\mathcal{C}$  nicht leeren Durchschnitt, und es gibt daher für jedes  $k \in \{1, \dots, n\}$  einen Punkt

$$q_k \in \bigcap_{i \neq k} C_i.$$

Nach dem Satz von Radon gibt es eine Partition von  $\{q_1, \dots, q_n\}$  in zwei disjunkte Teilmengen  $U, V$  und einen Punkt  $z \in (\text{conv } U) \cap (\text{conv } V)$ . Nehmen wir an, dass die Nummerierung so wie beim Beweis des Satzes von Radon gewählt ist, d.h.  $U = \{q_1, \dots, q_p\}$  und  $V = \{q_{p+1}, \dots, q_n\}$ .

$z \in \text{conv } U$  impliziert dann  $z \in C_i$  für  $i \in \{p + 1, \dots, n\}$ , und  $z \in \text{conv } V$  impliziert  $z \in C_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, p\}$ . Daher ist  $z \in C_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ .  $\square$

Die folgende "unendliche" Version des Satzes von Helly erwähnen wir ohne Beweis:

**Satz 3.84** *Sei  $\mathcal{F}$  eine Familie von beliebig vielen kompakten konvexen Mengen im  $\mathbb{R}^d$ , sodass je  $d + 1$  Mengen aus  $\mathcal{F}$  nicht leeren Durchschnitt haben. Dann ist der Durchschnitt aller Mengen aus  $\mathcal{F}$  nicht leer.*

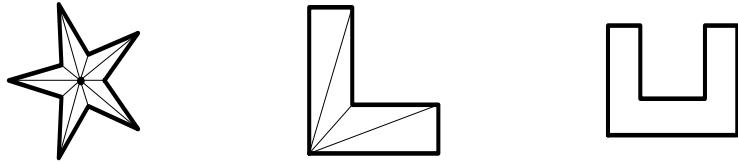
### 3.4.3 Sternförmige Mengen

**Definition 3.85** *Eine Teilmenge  $S$  des  $\mathbb{R}^d$  heißt **sternförmig**, wenn es einen Punkt  $p \in S$  gibt, sodass für jedes  $x \in S$  die Strecke  $[p, x]$  in  $S$  enthalten ist.*

Nennen wir einen Punkt  $x$  von  $p$  aus (innerhalb  $S$ ) *sichtbar*, wenn  $[p, x] \subset S$ , so können wir die Sternförmigkeit einer Menge  $S$  auch so ausdrücken: Es gibt in  $S$  einen Punkt  $p$ , von dem aus alle anderen Punkte sichtbar sind. Oder ebenso gut: Es gibt in  $S$  einen Punkt  $p$ , der von allen Punkten von  $S$  aus sichtbar ist.

Natürlich kann man in der Definition von "sternförmig" die abgeschlossene Strecke  $[p, x]$  durch die offene Strecke  $]p, x[$  ersetzen, da  $p$  und  $x$  ohnehin in  $S$  liegen.

Jede konvexe Menge ist (trivialerweise) sternförmig, aber nicht umgekehrt. Die folgende Abbildung zeigt drei nicht-konvexe Mengen, von denen die ersten beiden sternförmig sind. (Gemeint sind natürlich die abgeschlossenen Polygonflächen, die durch die dick gezeichneten Linien definiert sind, vgl. Kapitel 4.1.2.)



Wenn eine Menge  $S$  sternförmig ist, dann gibt es im allgemeinen nicht nur einen Punkt  $p$ , sodass  $[p, x] \subset S$  für alle  $x \in S$ .

**Definition 3.86** *Sei  $S$  eine sternförmige Menge. Dann heißt*

$$\{p \in S : [p, x] \subset S \text{ für alle } x \in S\}$$

*der **Kern** von  $S$ .*

Wir können auch sagen: Der Kern von  $S$  ist die Menge aller Punkte, in Bezug auf die  $S$  sternförmig ist.

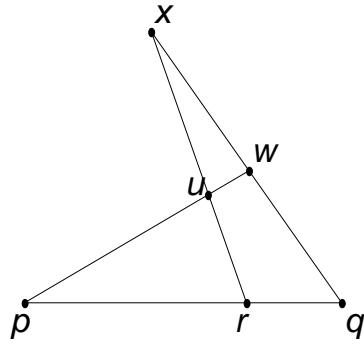
Interessanterweise gilt nun:

**Satz 3.87** *Der Kern jeder sternförmigen Menge ist konvex.*

*Beweis:* Seien  $p, q$  zwei verschiedene Punkte des Kerns  $K$  einer sternförmigen Menge  $S$ . Wir haben zu zeigen, dass für jedes  $\alpha \in ]0, 1[$  der Punkt  $r = (1 - \alpha)p + \alpha q$  in  $K$  liegt, d.h. dass  $[r, x] \subset S$  für alle  $x \in S$ .

Sei also  $x$  ein beliebiger Punkt aus  $S$ . Wenn  $x = p$  ist, dann ist  $[r, x] = [r, p] = [p, r]$ , und diese Strecke ist wegen  $p \in K$  sicher in  $S$  enthalten. (Es ist ja  $r \in S$ , denn  $r \in [p, q] \subset S$ , da  $q \in S$ .) Wir können daher  $x \neq p$  annehmen.

Sei  $u \in ]r, x[$ , sagen wir  $u = (1 - \beta)r + \beta x$  mit  $\beta \in ]0, 1[$ . Wir haben zu zeigen, dass  $u \in S$  ist, und überlegen uns dazu zunächst einmal, dass es einen Punkt  $w \in ]q, x[$  gibt, sodass  $u \in ]p, w[$  (siehe Abbildung).



Wir suchen also Zahlen  $\lambda, \mu \in ]0, 1[$ , sodass

$$u = (1 - \lambda)p + \lambda((1 - \mu)q + \mu x).$$

Das heißt  $(1 - \beta)r + \beta x = (1 - \lambda)p + \lambda((1 - \mu)q + \mu x)$ . Wenn wir hier  $r = (1 - \alpha)p + \alpha q$  einsetzen und ausmultiplizieren, erhalten wir

$$(1 - \beta)(1 - \alpha)p + (1 - \beta)\alpha q + \beta x = (1 - \lambda)p + \lambda(1 - \mu)q + \lambda\mu x.$$

Es genügt daher zu zeigen, dass das folgende Gleichungssystem in den Unbekannten  $\lambda, \mu$  eine Lösung mit Zahlen aus  $]0, 1[$  besitzt:

$$\begin{aligned} (1 - \beta)(1 - \alpha) &= 1 - \lambda \\ (1 - \beta)\alpha &= \lambda(1 - \mu) \\ \beta &= \lambda\mu \end{aligned}$$

Auf Grund der dritten Gleichung muss  $\mu = \frac{\beta}{\lambda}$  sein (falls  $\lambda \neq 0$ ). Setzen wir das in die zweite Gleichung ein, so erhalten wir  $(1 - \beta)\alpha = \lambda(1 - \frac{\beta}{\lambda}) = \lambda - \beta$  und daraus  $\lambda = (1 - \beta)\alpha + \beta$ , also  $1 - \lambda = 1 - (1 - \beta)\alpha - \beta = (1 - \beta)(1 - \alpha)$ . Damit haben wir jedenfalls eine Lösung des Gleichungssystems gefunden. Dass  $\lambda$  zwischen 0 und 1 liegt, folgt unmittelbar aus  $\alpha, \beta \in ]0, 1[$ . Beziiglich  $\mu$  ist nur noch zu zeigen, dass  $\beta < \lambda$ , d.h.  $\beta < (1 - \beta)\alpha + \beta$ , also  $0 < (1 - \beta)\alpha$ , und das folgt wieder aus  $\alpha, \beta \in ]0, 1[$ .

Jetzt wissen wir also, dass es tatsächlich einen Punkt  $w \in ]q, x[$  gibt, sodass  $u \in ]p, w[$  (nämlich  $w = (1 - \mu)q + \mu x$  mit dem berechneten  $\mu$ ). Wegen  $q \in K$  ist  $w \in S$ , und wegen  $p \in K$  ist daher auch  $u \in S$ , was zu zeigen war.  $\square$

**Satz 3.88** (Satz von Krasnosel'skij 1946) *Eine nicht leere kompakte Teilmenge  $S$  des  $\mathbb{R}^d$  ist genau dann sternförmig, wenn es zu jeder Menge  $P$  von  $d + 1$  Punkten aus  $S$  einen Punkt  $x_P$  gibt, von dem aus alle Punkte aus  $P$  (innerhalb  $S$ ) sichtbar sind.*

(Der russische Mathematiker *Mark Alexandrowitsch Krasnosel'skij* (1920 - 1997) ist vor allem durch diesen Satz und gewisse funktionalanalytische Fixpunktsätze bekannt geworden.)

Die 2-dimensionale Version dieses Satzes wird oft folgenderweise beschrieben: Wenn man in einer Bildergalerie zu je drei Bildern einen Punkt finden kann, von dem aus man diese drei Bilder sieht, dann gibt es einen Punkt, von dem aus man alle Bilder sieht.

*Beweisidee:* Die angegebene Bedingung ist natürlich notwendig. Um zu zeigen, dass sie auch hinreichend ist, kann man folgenderweise vorgehen.

Für jedes  $x \in S$  sei  $S_x$  die Menge aller von  $x$  aus sichtbaren Punkte von  $S$ , und  $C_x$  sei die konvexe Hülle von  $S_x$ . Nach Voraussetzung haben je  $d + 1$  Mengen  $S_x$  einen nicht leeren Durchschnitt, und daher auch je  $d + 1$  Mengen  $C_x$ . Nach der "unendlichen Version" des Satzes von Helly (Satz 3.84) folgt daraus, dass es einen Punkt  $x_0 \in \bigcap_{x \in S} C_x$  gibt, und man kann nun zeigen, dass  $S$  in Bezug auf  $x_0$  sternförmig ist. (Einen ausführlichen Beweis findet man z.B. in [10].)  $\square$

### 3.4.4 Topologische Eigenschaften konvexer Mengen

Sei  $M$  eine beliebige Teilmenge des  $\mathbb{R}^d$ . Wir verwenden folgende Bezeichnungen:

$\text{int } M \dots$  Menge der inneren Punkte (*interior*) von  $M$  ,

$\text{bd } M \dots$  Menge der Randpunkte (*boundary*) von  $M$  ,

$\text{cl } M \dots$  abgeschlossene Hülle (*closure*) von  $M$  .

Bekanntlich gilt:

$$x \in \text{int } M \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : K(x, \varepsilon) \subset M,$$

$x \in \text{bd } M \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : K(x, \varepsilon) \cap M \neq \emptyset \text{ und } K(x, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^d \setminus M) \neq \emptyset,$

$\text{cl } M = \text{int } M \cup \text{bd } M,$

$\text{cl } K(x, \varepsilon) = \overline{K}(x, \varepsilon),$

Die abgeschlossene Hülle von  $M$  ist die kleinste abgeschlossene Menge, welche  $M$  enthält. Das heißt: Wenn  $A$  eine beliebige abgeschlossene Menge mit  $M \subset A$  ist, dann gilt auch  $\text{cl } M \subset A$ .

**Beispiel 3.89** Zum Begriff "innere Punkte": Sei  $\overline{H^-} = \{x : a \cdot x \leq \beta\}$  ein abgeschlossener Halbraum und  $H^- = \{x : a \cdot x < \beta\}$  der zugehörige offene Halbraum. Dann ist  $H^- = \text{int } \overline{H^-}$ .

*Beweis:* Wir können natürlich  $\|a\| = 1$  annehmen.

a) Sei  $x \in H^-$ . Dann ist  $\varepsilon := \beta - a \cdot x > 0$ , und es folgt leicht  $K(x, \varepsilon) \subset \overline{H^-}$  ( $\varepsilon$  ist ja der Abstand des Punktes  $x$  von der Hyperebene  $H$ ). Also ist  $x \in \text{int } \overline{H^-}$ .

b) Sei  $x \in \text{int } \overline{H^-}$ . Dann gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , sodass  $K(x, \varepsilon) \subset \overline{H^-}$ . Jedenfalls ist  $x \in \overline{H^-} = H^- \cup H$ . Angenommen,  $x \in H$ . Dann wäre  $a \cdot (x + \frac{\varepsilon}{2}a) = a \cdot x + \frac{\varepsilon}{2} = \beta + \frac{\varepsilon}{2} > \beta$ , im Widerspruch zu  $x + \frac{\varepsilon}{2}a \in K(x, \varepsilon) \subset \overline{H^-}$ . Also folgt  $x \in H^-$ .  $\square$

Sehen wir uns nun zunächst Simplizes näher an:

**Satz 3.90** Sei  $S$  die konvexe Hülle von  $d+1$  affin unabhängigen Punkten  $p_0, p_1, \dots, p_d$  im  $\mathbb{R}^d$ . Dann ist

$$\text{int } S = \left\{ \sum_{i=0}^d \lambda_i p_i : \sum_{i=0}^d \lambda_i = 1 \text{ und } \lambda_i > 0 \text{ für alle } i \in \{0, \dots, d\} \right\}.$$

Insbesondere ist also  $\text{int } S \neq \emptyset$ .

*Beweis:* Nach Satz 3.52 gibt es eine eindeutig bestimmte affine Abbildung  $\alpha : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  mit  $\alpha(o) = p_0$  und  $\alpha(e_i) = p_i$  für  $i \in \{1, \dots, d\}$ . Da die  $p_i$  affin unabhängig sind, ist  $\alpha$  eine Affinität. (Die zugehörige lineare Abbildung  $f$  ist durch  $f(e_i) = p_i - p_0$  charakterisiert.)

$\alpha$  bildet das Simplex  $E$  mit den Ecken  $o, e_1, \dots, e_n$  bijektiv auf  $S$  ab (siehe Bemerkung 3.73).

Da  $\alpha$  ein Homöomorphismus ist (siehe Bemerkung 3.54), bildet  $\alpha$  die inneren Punkte von  $E$  umkehrbar eindeutig auf die inneren Punkte von  $S$  ab. Nun gilt aber mit  $e_0 := o$ :

$$\begin{aligned} x \in E &\Leftrightarrow x = \sum_{i=0}^d \lambda_i e_i \text{ mit } \lambda_i \geq 0 \text{ und } \sum_{i=0}^d \lambda_i = 1 \\ &\Leftrightarrow x = (1 - \sum_{i=1}^d \lambda_i)e_0 + \sum_{i=1}^d \lambda_i e_i \text{ mit } \lambda_i \geq 0 \text{ und } \sum_{i=1}^d \lambda_i \leq 1 \\ &\Leftrightarrow x = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \text{ mit } \lambda_i \geq 0 \text{ und } \sum_{i=1}^d \lambda_i \leq 1. \end{aligned}$$

Wir können also schreiben:

$$E = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_d) : \lambda_i \geq 0 \text{ und } \sum_{i=1}^d \lambda_i \leq 1 \right\}.$$

Offensichtlich gilt daher (vgl. Beispiel 3.89):

$$\text{int } E = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_d) : \lambda_i > 0 \text{ und } \sum_{i=1}^d \lambda_i < 1 \right\}.$$

Wegen  $\alpha((\lambda_1, \dots, \lambda_d)) = \alpha\left((1 - \sum_{i=1}^d \lambda_i)e_0 + \sum_{i=1}^d \lambda_i e_i\right) = (1 - \sum_{i=1}^d \lambda_i)p_0 + \sum_{i=1}^d \lambda_i p_i$  folgt daraus die Behauptung (mit  $\lambda_0 := 1 - \sum_{i=1}^d \lambda_i$ ).  $\square$

**Folgerung 3.91** *Sei  $C$  eine konvexe Teilmenge des  $\mathbb{R}^d$ , die in keiner Hyperebene enthalten ist. Dann besitzt  $C$  innere Punkte.*

*Beweis:*

Nach der Bemerkung 3.28 enthält  $C$  jedenfalls  $d+1$  affin unabhängige Punkte  $p_0, \dots, p_d$ . Das von diesen Punkten aufgespannte Simplex ist in  $C$  enthalten und enthält nach obigem Satz innere Punkte, und das sind natürlich auch innere Punkte von  $C$ .

Umgekehrt gilt:

**Bemerkung 3.92** *Wenn eine beliebige Menge  $S$  in einer Hyperebene enthalten ist, dann besitzt sie keine inneren Punkte.*

*Beweis:* Sei  $S$  eine Menge, die in der Hyperebene  $H = \{x \in \mathbb{R}^s : a \cdot x = \beta\}$  enthalten ist, wobei wir  $\|a\| = 1$  annehmen. Angenommen,  $p$  wäre ein innerer Punkt von  $S$ . Dann gäbe es eine Kugel  $K(p, \varepsilon)$ , welche in  $S$  und daher auch

in  $H$  enthalten ist. Betrachten wir nun den Punkt  $q := p + \frac{\varepsilon}{2}a$ , so sehen wir:  $q \in K(p, \varepsilon)$ , da  $\|q - p\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ , aber  $a \cdot q = a \cdot p + a \cdot \frac{\varepsilon}{2}a = \beta + \frac{\varepsilon}{2} \neq \beta$ , also  $q \notin H$ , und das ergibt einen Widerspruch.  $\square$

Für konvexe Mengen, die in einer Hyperebene enthalten sind, werden wir gelegentlich den folgenden Begriff verwenden:

**Definition 3.93**  $p \in C$  heißt **relativ innerer Punkt** von  $C$ , wenn es ein  $\varepsilon > 0$  gibt, sodass  $(K(p, \varepsilon) \cap \text{aff } C) \subset C$ . Die Menge der relativ inneren Punkte von  $C$  bezeichnen wir mit  $\text{relint } C$ .

$p$  ist also relativ innerer Punkt von  $C$  genau dann, wenn er in Bezug auf den affinen Raum  $\text{aff } C$  ein innerer Punkt von  $C$  ist. Im Unterschied zu den "echt" inneren Punkten besitzt jede konvexe Menge relativ innere Punkte.

Der folgende Begriff ist analog dazu:

**Definition 3.94**  $p \in \text{aff } C$  heißt **relativer Randpunkt** von  $C$ , wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  sowohl  $K(p, \varepsilon) \cap C \neq \emptyset$  als auch  $K(p, \varepsilon) \cap (\text{aff } C \setminus C) \neq \emptyset$ . Die Menge der relativen Randpunkte von  $C$  bezeichnen wir mit  $\text{relbd } C$ .

Im Folgenden kommen *halboffene Verbindungsstrecken* vor, die wir so bezeichnen:

$$]p, q] := \{(1 - \lambda)p + \lambda q : 0 < \lambda \leq 1\}.$$

**Hilfssatz 3.95** Sei  $C$  eine konvexe Menge,  $p \in C$  und  $q \in \text{int } C$ . Dann ist  $]p, q] \subset \text{int } C$ .

*Beweis:* Es gibt eine Kugel  $K(q, \varepsilon) \subset C$  (mit  $\varepsilon > 0$ ). Wir betrachten die konvexe Hülle von  $p$  und  $K(q, \varepsilon)$ :

$$A := \text{conv}(\{p\} \cup K(q, \varepsilon)).$$

Jedenfalls ist  $A \subset C$ . Sei nun  $y \in ]p, q]$ , d.h.  $y = (1 - \lambda)p + \lambda q$  mit  $0 < \lambda \leq 1$ . Wir zeigen

$$K(y, \lambda \varepsilon) \subset A,$$

und dann sind wir fertig.

$$z \in K(y, \lambda \varepsilon) \Rightarrow \|z - y\| < \lambda \varepsilon \Rightarrow \left\| \frac{1}{\lambda}(z - y) \right\| < \varepsilon \Rightarrow q + \frac{1}{\lambda}(z - y) \in K(q, \varepsilon) \subset A.$$

$$z = y + (z - y) = (1 - \lambda)p + \lambda q + \lambda \frac{1}{\lambda}(z - y) = (1 - \lambda)p + \lambda \left( q + \frac{1}{\lambda}(z - y) \right) \in A,$$

da  $p \in A$  und  $q + \frac{1}{\lambda}(z - y) \in A$ .  $\square$

**Satz 3.96** *Das Innere einer konvexen Menge ist ebenfalls konvex.*

*Beweis:* Sei  $C$  konvex und  $p, q \in \text{int } C$ . Aus Hilfssatz 3.95 folgt  $[p, q] \subset \text{int } C$  und daher  $[p, q] \subset \text{int } C$ .  $\square$

**Satz 3.97** *Sei  $C$  eine konvexe Menge mit inneren Punkten. Dann ist  $C$  in der abgeschlossenen Hülle ihrer inneren Punkte enthalten (d.h.  $C \subset \text{cl}(\text{int } C)$ ).*

*Bemerkung:* Für nicht-konvexe Mengen ist das im Allgemeinen nicht richtig. Sei z.B.  $M = ]0, 1[ \cup \{2\} \subset \mathbb{R}^1$ . Dann ist  $M$  nicht in  $\text{cl}(\text{int } M) = [0, 1]$  enthalten.

*Beweis des Satzes:*

Sei  $x \in C$  und  $q \in \text{int } C$ . Nach Hilfssatz 3.95 ist  $[x, q] \subset \text{int } C$ . Da jede Umgebung von  $x$  einen Punkt aus  $[x, q]$  enthält, folgt daraus sofort die Behauptung.  $\square$

**Folgerung 3.98** *Sei  $C$  eine abgeschlossene konvexe Menge mit inneren Punkten. Dann gilt  $C = \text{cl}(\text{int } C)$ .*

### 3.4.5 Trennungssätze

**Definition 3.99** *Sei  $S$  eine Teilmenge eines Vektorraums  $V$  und  $\lambda$  ein Skalar. Dann ist*

$$\lambda S := \{\lambda x : x \in S\}.$$

**Definition 3.100** *Sei  $C$  eine konvexe Menge im  $\mathbb{R}^d$ , welche den Ursprung  $o$  enthält. Die folgenderweise definierte Funktion*

$$g_C : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+} \cup \{\infty\}$$

*heißt die **Distanzfunktion** (engl. **gauge function**) von  $C$ :*

$$g_C(x) := \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda C\}.$$

*Dabei ist  $\overline{\mathbb{R}^+} := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ , und unter dem Infimum der leeren Menge verstehen wir das Symbol  $\infty$  mit den üblichen Konventionen, insbesondere  $0 \cdot \infty = 0$ .*

Die nächsten beiden Bemerkungen enthalten die wesentlichen Eigenschaften einer Distanzfunktion.

**Bemerkung 3.101**  $g_C$  ist subadditiv, d.h.  $g_C(x + y) \leq g_C(x) + g_C(y)$  für beliebige  $x, y \in \mathbb{R}^d$ .

*Beweis:* Sei  $x \in \lambda C$  und  $y \in \mu C$  mit  $\lambda, \mu > 0$ . Dann liegen  $\frac{x}{\lambda}$  und  $\frac{y}{\mu}$  in  $C$ , und wegen der Konvexität von  $C$  gilt

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right) \frac{x}{\lambda} + \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right) \frac{y}{\mu} \in C,$$

das heißt aber  $\frac{1}{\lambda + \mu}(x + y) \in C$ , also  $x + y \in (\lambda + \mu)C$  und somit  $g_C(x + y) \leq \lambda + \mu$ . Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung 3.102**  $g_C$  ist positiv homogen, d.h.  $g_C(\alpha x) = \alpha g_C(x)$  für  $\alpha \geq 0$ .

*Beweis:* Das folgt leicht aus

$$x \in \lambda C \Leftrightarrow \alpha x \in \alpha \lambda C \text{ für } \alpha > 0.$$

$\square$

Der folgende Satz ist grundlegend für die Theorie der konvexen Mengen. Das Analogon für unendlichdimensionale Räume ist der für die Funktionalanalysis fundamentale "Satz von Hahn-Banach".

(Der polnische Mathematiker *Stefan Banach* (1892 - 1945) gilt als Begründer der modernen Funktionalanalysis. *Hans Hahn* (1879 - 1934) ist ein Wiener Mathematiker, der sich ebenfalls mit Funktionalanalysis beschäftigt hat und vor allem wegen des Satzes von Hahn-Banach bekannt ist. Vergleichen Sie dazu die geschichtliche Bemerkung zum Satz 3.83 von Helly.)

**Satz 3.103** (Trennungssatz) *Sei  $C$  eine konvexe Menge im  $\mathbb{R}^d$  und  $p$  ein Punkt aus  $\mathbb{R}^d \setminus C$ . Dann gibt es eine Hyperebene  $H$ , welche  $p$  und  $C$  trennt, d.h.  $p \in \overline{H^+}$  und  $C \subset \overline{H^-}$  (oder umgekehrt).*

*Beweis:* Sei o.B.d.A.  $o \in C$ . Wir bezeichnen die Distanzfunktion  $g_C$  kurz mit  $g$ .

Es geht eigentlich darum, eine lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  (d.h. ein *lineares Funktional*) zu finden, sodass

$$\begin{aligned} f(x) &\leq g(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^d, \\ \text{und } f(p) &= 1. \end{aligned}$$

Wenn nämlich  $f$  ein solches lineares Funktional ist, dann hat die Hyperebene  $H := \{x : f(x) = 1\}$  die gewünschten Eigenschaften: Für alle  $x \in C$  ist  $g(x) \leq 1$  und daher  $f(x) \leq 1$ , also  $C \subset \overline{H^-}$ , und  $p \in H \subset \overline{H^+}$ .

Zunächst ist es leicht, ein derartiges Funktional  $f_1$  auf dem durch  $p$  erzeugten (eindimensionalen) linearen Teilraum  $T_1$  zu definieren, indem man einfach (für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$ )  $f_1(\alpha p) := \alpha$  setzt: Trivialerweise ist  $f_1(p) = 1$ ;

für  $\alpha \geq 0$  ist  $g(\alpha p) = \alpha g(p) \geq \alpha = f_1(\alpha p)$ , denn  $g(p) \geq 1$  wegen  $p \notin C$ ;

und für  $\alpha < 0$  ist  $g(\alpha p) \geq 0 > \alpha = f_1(\alpha p)$ .

Nun sei  $k$  die größte natürliche Zahl ( $\leq d$ ), sodass ein linearer Teilraum mit Dimension  $k$  existiert, auf dem es ein lineares Funktional mit den gewünschten Eigenschaften gibt. Wir müssen nur die Annahme  $k < d$  zu einem Widerspruch führen. (Das ist eigentlich eine Art Induktionsschluss.)

Sei also  $T_k$  ein  $k$ -dimensionaler linearer Teilraum mit Basis  $\{u_1, \dots, u_k\}$ , und  $f_k$  sei ein auf  $T_k$  definiertes Funktional mit den angegebenen Eigenschaften. Wenn  $k < d$  ist, gibt es einen Vektor  $u_{k+1} \in \mathbb{R}^d \setminus T_k$ . Sei  $T_{k+1}$  die lineare Hülle von  $\{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}\}$ . Das ist also ein  $(k+1)$ -dimensionaler Teilraum von  $\mathbb{R}^d$ , und wir werden zeigen, dass sich  $f_k$  unter Beibehaltung der obigen Eigenschaften zu einem linearen Funktional  $f_{k+1}$  auf  $T_{k+1}$  fortsetzen lässt.

Wenn es so ein Funktional gibt, dann muss jedenfalls für alle  $x \in T_k$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  gelten:

$$f_{k+1}(x + \alpha u_{k+1}) = f_k(x) + \alpha \gamma \quad \text{mit } \gamma := f_{k+1}(u_{k+1}).$$

Es geht also nur um die Frage, ob man  $\gamma$  so wählen kann, dass

$$f_k(x) + \alpha \gamma \leq g(x + \alpha u_{k+1}) \quad \text{für alle } x \in T_k \text{ und } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Für  $\alpha = 0$  ist das auf Grund unserer Annahme richtig,

für  $\alpha > 0$  heißt es:  $f_k\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \gamma \leq g\left(\frac{x}{\alpha} + u_{k+1}\right)$ ,

und für  $\alpha < 0$  heißt es  $f_k\left(\frac{x}{-\alpha}\right) - \gamma \leq g\left(\frac{x}{-\alpha} - u_{k+1}\right)$ .

Wir brauchen also ein  $\gamma$  mit

$$f_k\left(\frac{x'}{-\alpha'}\right) - g\left(\frac{x'}{-\alpha'} - u_{k+1}\right) \leq \gamma \leq -f_k\left(\frac{x}{\alpha}\right) + g\left(\frac{x}{\alpha} + u_{k+1}\right)$$

für  $x, x' \in T_k$ , sowie  $\alpha > 0$  und  $\alpha' < 0$ .

Es genügt offensichtlich, ein  $\gamma$  zu finden, sodass für alle  $y, z \in T_k$  gilt:

$$f_k(y) - g(y - u_{k+1}) \leq \gamma \leq -f_k(z) + g(z + u_{k+1}).$$

Nun gilt aber (auf Grund unserer Annahme und der Subadditivität von  $g$ ) für alle  $y, z \in T_k$ :

$$f_k(y) + f_k(z) = f_k(y + z) \leq g(y + z) \leq g(y - u_{k+1}) + g(z + u_{k+1}),$$

d.h.

$$f_k(y) - g(y - u_{k+1}) \leq -f_k(z) + g(z + u_{k+1}) \text{ für beliebige } y, z \in T_k,$$

und folglich

$$\sup_{y \in T_k} (f_k(y) - g(y - u_{k+1})) \leq \inf_{z \in T_k} (-f_k(z) + g(z + u_{k+1})).$$

Bezeichnen wir die linke Seite dieser Ungleichung mit  $\mu$  und die rechte mit  $\nu$ , so ist offensichtlich jedes  $\gamma \in [\mu, \nu]$  geeignet.  $\square$

**Bemerkung 3.104** *Wir haben eigentlich gezeigt, dass es unter den angegebenen Voraussetzungen eine Hyperebene  $H$  gibt, sodass  $p \in H$  und  $C \subset \overline{H^-}$ . (In dieser Formulierung ist allerdings die Bezeichnung "Trennungssatz" nicht mehr so plausibel.)*

Der nachstehende Folgerung aus dem Trennungssatz ist besonders grundlegend für die Theorie der konvexen Mengen.

**Satz 3.105** *Zu jedem Randpunkt  $p$  einer konvexen Menge  $C$  im  $\mathbb{R}^d$  gibt es eine Hyperebene  $H$  mit  $p \in H$  und  $C \subset \overline{H^-}$ .*

**Definition 3.106** *So eine Hyperebene heißt **Stützhyperebene** (engl. **supporting hyperplane**) von  $C$  im Punkt  $p$ , und  $H^-$  bzw.  $\overline{H^-}$  heißt **offener** bzw. **abgeschlossener Stützhalbraum** (**supporting halfspace**) von  $C$  im Punkt  $p$ .*

Für  $d = 2$  sagt man auch *Stützgerade bzw. Stützhalbene*.

Stützhyperebenen können als verallgemeinerte Tangentialhyperebenen angesehen werden, also insbesondere Stützgeraden als verallgemeinerte Tangenten. Ein wesentlicher Unterschied zu den Tangentialhyperebenen besteht darin, dass die Stützhyperebenen im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt sind.

Die Stützhyperebenen  $H$  einer abgeschlossenen konvexen Menge  $C$  sind durch  $H \cap C \neq \emptyset$  und  $C \subset \overline{H^-}$  charakterisiert: Wenn  $H \cap C \neq \emptyset$  und  $C \subset \overline{H^-}$ , dann ist  $H$  eine Stützhyperebene in jedem Punkt  $p \in H \cap C$ . (Die Umkehrung ist trivial.)

*Beweis des Satzes:*

Wenn  $\text{int } C = \emptyset$ , so ist nach Satz 3.91  $C$  in einer Hyperebene enthalten und somit die Aussage des Satzes trivial.

Sei also  $\text{int } C \neq \emptyset$ . Da nach Satz 3.96  $\text{int } C$  konvex ist, können wir den Trennungssatz mit  $\text{int } C$  an Stelle von  $C$  anwenden und erhalten eine Hyperebene  $H$  mit  $p \in H$  und  $\text{int } C \subset \overline{H^-}$  (siehe Bemerkung 3.104). Wegen der Abgeschlossenheit von  $\overline{H^-}$  folgt daraus  $\text{cl}(\text{int } C) \subset \overline{H^-}$ . Andererseits ist nach Satz 3.97  $C \subset \text{cl}(\text{int } C)$ , also folgt  $C \subset \overline{H^-}$ .  $\square$

Es gibt verschiedene Varianten des Trennungssatzes. Wir besprechen hier nur die folgende:

**Satz 3.107** (Strikter Trennungssatz) *Sei  $C$  eine konvexe Menge im  $\mathbb{R}^d$  und  $p$  ein Punkt aus  $\mathbb{R}^d \setminus \text{cl } C$ . Dann gibt es eine Hyperebene  $H$ , welche  $p$  und  $C$  strikt trennt, d.h.  $p \in H^+$  und  $C \subset H^-$  (oder umgekehrt).*

Zum Beweis verwenden wir den folgenden Begriff, der auch sonst öfters nützlich ist.

**Definition 3.108** *Sei  $S$  eine beliebige Teilmenge des  $\mathbb{R}^d$  und  $\varepsilon > 0$ . Dann heißt*

$$S^\varepsilon := \bigcup_{x \in S} K(x, \varepsilon)$$

*der (offene)  $\varepsilon$ -Parallelbereich von  $S$ .*

**Bemerkung 3.109** *Der  $\varepsilon$ -Parallelbereich einer konvexen Menge ist ebenfalls konvex.*

*Beweis dieser Bemerkung:*

Sei  $C$  konvex und  $u, v \in C^\varepsilon$ . Dann gibt es  $x, y \in C$ , sodass  $u \in K(x, \varepsilon)$  und  $v \in K(y, \varepsilon)$ . Sei nun  $w = (1 - \lambda)u + \lambda v$  mit  $\lambda \in [0, 1]$ . Wir zeigen nun, dass  $w \in K(z, \varepsilon)$  mit  $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$ . (Dann sind wir fertig.)

$$\begin{aligned} \|w - z\| &= \|(1 - \lambda)u + \lambda v - (1 - \lambda)x - \lambda y\| = \|(1 - \lambda)(u - x) + \lambda(v - y)\| \leq \\ &\leq (1 - \lambda) \|u - x\| + \lambda \|v - y\| < (1 - \lambda)\varepsilon + \lambda\varepsilon = \varepsilon, \text{ w.z.z.w. } \square \end{aligned}$$

*Beweis von Satz 3.107:* Wenn  $p \notin \text{cl } C$ , so gibt es eine  $\varepsilon$ -Kugel um  $p$ , welche zu  $C$  disjunkt ist:  $K(p, \varepsilon) \cap C = \emptyset$ .

Dann ist  $p \notin C^\varepsilon$ , denn sonst gäbe es ein  $x \in C$ , sodass  $p \in K(x, \varepsilon)$ , also  $\|p - x\| < \varepsilon$ . Das hieße aber  $x \in K(p, \varepsilon) \cap C$ , im Widerspruch zu  $K(p, \varepsilon) \cap C = \emptyset$ .

Da  $C^\varepsilon$  konvex ist, gibt es somit auf Grund des Trennungssatzes eine Hyperebene  $H = \{x : a \cdot x = \beta\}$ , sodass  $p \in \overline{H^+}$  und  $C^\varepsilon \subset \overline{H^-}$ .

Wir nehmen an, dass  $a$  normiert ist, d.h.  $\|a\| = 1$ , und zeigen, dass die folgende (zu  $H$  parallele) Hyperebene  $H'$  die gewünschten Eigenschaften hat:

$$H' := \left\{ x : a \cdot x = \beta - \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

1.  $p \in H'^+$ , denn  $p \in \overline{H^+}$  und daher  $a \cdot p \geq \beta > \beta - \frac{\varepsilon}{2}$ .
2.  $C \subset H'^-$ : Sei  $x \in C$ . Dann ist  $K(x, \varepsilon) \subset C^\varepsilon \subset \overline{H^-}$ , also

$$a \cdot y \leq \beta \text{ für alle } y \in K(x, \varepsilon).$$

Wegen  $\|a\| = 1$  können wir z.B.  $y := x + \frac{3}{4}\varepsilon a$  nehmen, und es folgt

$$a \cdot y = a \cdot \left( x + \frac{3}{4}\varepsilon a \right) = a \cdot x + \frac{3}{4}\varepsilon \leq \beta,$$

also  $a \cdot x \leq \beta - \frac{3}{4}\varepsilon < \beta - \frac{\varepsilon}{2}$  und somit  $x \in H'^-$ .  $\square$

**Folgerung 3.110** *Jede abgeschlossene konvexe Teilmenge des  $\mathbb{R}^d$  ist gleich dem Durchschnitt aller sie enthaltenden abgeschlossenen Halbräume.*

*Beweis:* Sei  $C$  eine abgeschlossene konvexe Teilmenge des  $\mathbb{R}^d$  und  $D$  der Durchschnitt aller  $C$  enthaltenden abgeschlossenen Halbräume. Es gilt also klarerweise  $C \subset D$ .

Angenommen,  $C \neq D$ . Dann gibt es einen Punkt  $p \in D \setminus C$ . Da  $C$  abgeschlossen ist, können wir  $p$  und  $C$  durch eine Hyperebene  $H$  strikt trennen, sodass  $p \in H^+$  und  $C \subset H^- \subset \overline{H^-}$ . Dann ist auch  $D \subset \overline{H^-}$ , aber  $p \notin \overline{H^-}$ , im Widerspruch zu  $p \in D$ .  $\square$

### 3.4.6 Konvexe Polytope und ihre Seiten

**Definition 3.111** Eine Teilmenge  $F$  einer  $d$ -dimensionalen konvexen Menge  $C$  (insbesondere eines  $d$ -Polytops) heißt **Seite** (engl. *face*) von  $C$ , wenn es eine Stützhyperebene  $H$  von  $C$  mit  $F = H \cap C$  gibt. Eine Seite der Dimension  $k$  heißt auch kurz  $k$ -**Seite**. 0-Seiten nennt man **Ecken** (*vertices*), 1-Seiten **Kanten** (*edges*),  $(d-1)$ -Seiten **Facetten** (*facets*) (für  $d=3$  auch: **Flächen**).

Jede Ecke ist eine einelementige Menge  $\{v\}$ . Üblicherweise unterscheidet man nicht zwischen dieser Menge und dem einen Element  $v$ .

*Bezeichnung:*  $\text{vert } C :=$  Menge der Ecken von  $C$ .

Die Ecken und Kanten eines konvexen Polygons oder Polyeders gemäß dieser Definition stehen in Einklang mit den entsprechenden anschaulichen Begriffen. (Bezüglich nicht-konvexer Polygone siehe Kapitel 4.1.2.)

*Bemerkungen:*

1. Jeder Randpunkt einer konvexen Menge  $C$  gehört zu (mindestens) einer Seite von  $C$ , denn nach Satz 3.105 geht durch jeden Randpunkt eine Stützhyperebene.
2. Manchmal rechnet man auch die leere Menge und  $C$  selbst zu den Seiten von  $C$ . Man nennt diese dann die *uneigentlichen Seiten* von  $C$ .

**Satz 3.112** Jedes konvexe Polytop ist abgeschlossen und beschränkt (das heißt kompakt).

*Beweis:* Sei  $P = \text{conv}\{p_1, \dots, p_n\}$  ein konvexes Polytop, und  $x$  ein Randpunkt von  $P$ . Dann gibt es bekanntlich eine Folge  $(x_k)$  von Punkten aus  $P$ , welche gegen  $x$  konvergiert. Jedes  $x_k$  lässt sich als Konvexitätskombination der Punkte  $p_i$  darstellen, das heißt es gibt  $\lambda_{ki} \in \mathbb{R}$ , sodass  $x_k = \sum_{i=1}^n \lambda_{ki} p_i$  mit  $0 \leq \lambda_{ki} \leq 1$  und  $\sum_{i=1}^n \lambda_{ki} = 1$  für alle  $k$ . Die  $n$ -Tupel  $c_k := (\lambda_{k1}, \dots, \lambda_{kn})$  bilden eine beschränkte Folge  $(c_k)$  im  $\mathbb{R}^n$  und besitzen daher (auf Grund des

bekannten Satzes von Bolzano-Weierstrass) eine konvergente Teilfolge. Sei  $c = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  der Limes dieser Teilfolge. Dann konvergiert die entsprechende Teilfolge von  $(x_k)$  gegen  $\sum_{i=1}^n \lambda_i p_i$ , also muss  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i$  sein. Da  $0 \leq \lambda_i \leq 1$  und  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$  (auf Grund bekannter Eigenschaften des Grenzwertes), folgt  $x \in P$ . Also ist  $P$  abgeschlossen.

$P$  ist beschränkt: Zum Beispiel enthält die Kugel  $\overline{K}(o, r)$  mit  $r = \max_{1 \leq i \leq n} \|p_i\|$  alle Punkte  $p_i$  und daher auch deren konvexe Hülle  $P$ .  $\square$

*Bemerkung:* Mit Hilfe des Satzes von Carathéodory kann man zeigen, dass allgemeiner die konvexe Hülle jeder kompakten Teilmenge des  $\mathbb{R}^d$  wiederum kompakt ist (siehe z.B. [2]).  $\square$

**Satz 3.113** *Sei  $P$  die konvexe Hülle einer endlichen Menge  $S$ . Dann ist*

$$\text{vert } P \subset S$$

und

$$P = \text{conv}(\text{vert } P).$$

*Beweis:*

Sei  $S_0$  eine (bezüglich der Inklusion) minimale Teilmenge von  $S$  mit der Eigenschaft  $P = \text{conv } S_0$ .

Wenn wir zeigen können, dass  $S_0 = \text{vert } P$  ist, so folgen daraus sofort die beiden Behauptungen des Satzes.

a)  $S_0 \subset \text{vert } P$ :

Sei  $v_0 \in S_0$  und  $P' = \text{conv}(S_0 \setminus \{v_0\})$ .

$v_0 \notin P'$ , denn sonst wäre  $S_0 \subset P'$  und somit  $\text{conv } S_0 \subset P' \subset P$ . Wegen  $P = \text{conv } S_0$  würde dann  $P = P'$  folgen, d.h.  $P = \text{conv}(S_0 \setminus \{v_0\})$ , im Widerspruch zur Minimalität von  $S_0$ .

Da  $P'$  abgeschlossen ist, gibt es eine  $v_0$  und  $P'$  strikt trennende Hyperebene  $H' = \{x : u \cdot x = \beta\}$ , d.h. (o.B.d.A.):

$$\gamma := u \cdot v_0 > \beta, \text{ und } u \cdot x < \beta \text{ für alle } x \in P'.$$

Sei nun

$$H := \{x : u \cdot x = \gamma\},$$

also  $v_0 \in H$  und  $P' \subset H^-$ , somit  $S_0 \subset \overline{H^-}$  und daher auch  $P \subset \overline{H^-}$ . Wenn wir zeigen, dass  $H \cap P = \{v_0\}$ , dann folgt  $v_0 \in \text{vert } P$ , und damit ist dann der Teil a) bewiesen. Es genügt natürlich zu zeigen, dass  $H \cap P \subset \{v_0\}$ .

Sei  $y \in H \cap P$  und  $S_0 = \{v_0, \dots, v_n\}$ . Dann lässt sich  $y$  als Konvexitätskombination von Punkten aus  $S_0$  darstellen:  $y = \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i$  mit  $\lambda_i \geq 0$  und  $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ .

$u \cdot v_0 = \gamma$ , und wegen  $P' \subset H^-$  ist  $u \cdot v_i < \gamma$  für alle  $i > 0$ . Daher muss  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$  sein, denn sonst wäre

$$u \cdot y = \lambda_0 \gamma + \sum_{i=1}^n \lambda_i (u \cdot v_i) < \lambda_0 \gamma + \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma = \gamma,$$

im Widerspruch zu  $y \in H$ . Also folgt  $y = v_0$ , w.z.z.w..

b)  $\text{vert } P \subset S_0$ :

Nehmen wir an, es gibt eine Ecke  $v \notin S_0$ . Dann gibt es eine Stützhyperebene  $H$  von  $P$  mit  $H \cap P = \{v\}$ , also

$$S_0 \subset P \setminus \{v\} \subset H^-$$

und daher

$$v \in P = \text{conv } S_0 \subset H^-,$$

im Widerspruch zu  $v \in H$ .  $\square$

**Satz 3.114** *Jede nicht leere Seite eines konvexen Polytops  $P$  ist die konvexe Hülle einer Teilmenge von  $\text{vert } P$ .*

**Folgerung 3.115** *Jedes konvexe Polytop hat nur endlich viele Seiten.*

**Folgerung 3.116** *Jede  $k$ -Seite eines  $d$ -Polytops ist ein  $k$ -Polytop.*

*Beweis von Satz 3.114:*

Sei  $F$  eine nicht leere (eigentliche) Seite von  $P$ , also  $F = H \cap P$  mit einer Stützhyperebene  $H$  von  $P$ , sagen wir  $P \subset \overline{H^-}$ .

$H$  enthält mindestens eine Ecke von  $P$ , denn sonst wäre  $\text{vert } P \subset H^-$  und daher (nach Satz 3.113) auch  $P \subset H^-$  und somit  $H \cap P = \emptyset$ .

Seien  $v_1, \dots, v_r$  die auf  $H$  liegenden und  $v_{r+1}, \dots, v_n$  die übrigen Ecken von  $P$ .

*Behauptung:*  $F = \text{conv} \{v_1, \dots, v_r\}$ .

Wegen  $\{v_1, \dots, v_r\} \subset H \cap P = F$  ist nur zu zeigen:  $F \subset \text{conv} \{v_1, \dots, v_r\}$ .

Sei  $z \in F$ . Dann ist  $z \in P$  und es gibt daher  $\zeta_1, \dots, \zeta_n \geq 0$  mit  $\sum \zeta_i = 1$ , sodass  $z = \sum_{i=1}^n \zeta_i v_i$ .

Die Gleichung von  $H$  laute  $u \cdot x = \gamma$ . Dann gilt  $u \cdot z = \gamma$  und

$$u \cdot v_i \begin{cases} = \gamma & \text{für } 1 \leq i \leq r, \\ < \gamma & \text{für } r < i \leq n. \end{cases}$$

Daher muss  $\zeta_{r+1} = \dots = \zeta_n = 0$  sein, denn sonst ergäbe sich der folgende Widerspruch:

$$\gamma = u \cdot z = \sum_{i=1}^r \zeta_i \gamma + \sum_{i=r+1}^n \zeta_i (u \cdot v_i) < \sum_{i=1}^r \zeta_i \gamma + \sum_{i=r+1}^n \zeta_i \gamma = \gamma.$$

Also folgt  $z \in \text{conv} \{v_1, \dots, v_r\}$ .  $\square$

Wir haben eigentlich folgende etwas schärfere Formulierung von Satz 3.114 bewiesen:

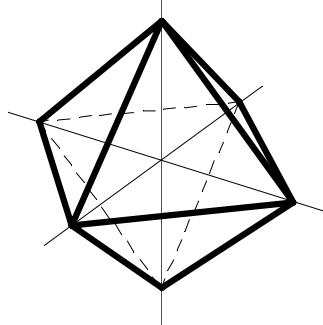
**Satz 3.117** *Jede Seite  $F$  eines konvexen Polytops  $P$  ist die konvexe Hülle der in  $F$  enthaltenen Ecken von  $P$ .*

Wir können äquivalent dazu auch sagen: *Jede Seite  $F$  eines konvexen Polytops  $P$  ist die konvexe Hülle der in einer zu  $F$  gehörigen Stützhyperebene enthaltenen Ecken von  $P$ .*

Die folgende Definition liefert uns ein einfaches, aber wichtiges Beispiel eines Polytops, an dem wir die Seiten explizit identifizieren können.

**Definition 3.118** *Sei  $e_i$  der  $i$ -te kanonische Basisvektor im  $\mathbb{R}^d$ . Die konvexe Hülle  $Q_d$  von  $\{e_1, -e_1, \dots, e_d, -e_d\}$  heißt  $d$ -dimensionales **Kreuzpolytop**. Für  $d = 3$  heißt  $Q_d$  auch (**reguläres**) **Oktaeder**.*

$Q_1$  ist das Intervall  $[-1, 1]$ ,  $Q_2$  ist das Quadrat mit den Ecken  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, -1)$ . Die folgende Abbildung zeigt das reguläre Oktaeder zusammen mit den Koordinatenachsen.



**Satz 3.119** Für das  $d$ -dimensionale **Kreuzpolytop**  $Q_d$  gilt

$$Q_d = \left\{ (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : \sum_{i=1}^d |x_i| \leq 1 \right\}.$$

*Beweis:*

a) Sei  $x \in Q_d$ . Dann gibt es  $\lambda_i, \mu_i$  mit  $\lambda_i \geq 0, \mu_i \geq 0, \sum_{i=1}^d (\lambda_i + \mu_i) = 1$ , sodass  $x = \sum_{i=1}^d (\lambda_i e_i + \mu_i (-e_i)) = (\lambda_1 - \mu_1, \dots, \lambda_d - \mu_d)$ , also  $x_i = \lambda_i - \mu_i$ . Wir sehen:

$$\sum_{i=1}^d |x_i| = \sum_{i=1}^d |\lambda_i - \mu_i| \leq \sum_{i=1}^d (|\lambda_i| + |\mu_i|) = \sum_{i=1}^d (\lambda_i + \mu_i) = 1.$$

b) Sei umgekehrt  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$  mit  $\sum_{i=1}^d |x_i| \leq 1$ . Dann ist

$$x = \sum x_i e_i = \sum |x_i| (\text{sign } x_i) e_i = (1 - \sum |x_i|) o + \sum |x_i| (\text{sign } x_i) e_i.$$

Hier ist  $x$  als Konvexitätskombination von  $o, \pm e_1, \dots, \pm e_d$  dargestellt. Wegen  $o = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}(-e_1)$  ist  $o \in Q_d$ , und daher gilt  $x \in \text{conv}\{o, \pm e_1, \dots, \pm e_d\} \subset Q_d$ .  $\square$

**Hilfssatz 3.120**  $\text{vert } Q_d = \{e_1, -e_1, \dots, e_d, -e_d\}$ .

*Beweis:* Nach Satz 3.113 ist  $\text{vert } Q_d \subset \{e_1, -e_1, \dots, e_d, -e_d\}$ . Es ist also nur zu zeigen, dass  $\pm e_i$  für jedes  $i \in \{1, \dots, d\}$  eine Ecke von  $Q_d$  ist.

Sei  $H_i := \{x \in \mathbb{R}^d : x_i = 1\}$ . Dann ist auf Grund des vorigen Satzes leicht zu sehen, dass  $Q_d \subset \overline{H_i^-}$  und  $H_i \cap Q_d = \{e_i\}$ . Daher ist  $e_i$  eine Ecke von  $Q_d$ . Für  $-e_i$  geht es analog mit  $H'_i := \{x \in \mathbb{R}^d : x_i = -1\}$ .  $\square$

**Satz 3.121** Sei  $S$  eine Teilmenge von  $\text{vert } Q_d = \{e_1, -e_1, \dots, e_d, -e_d\}$ . Die konvexe Hülle von  $S$  ist genau dann eine Seite des Kreuzpolytops  $Q_d$ , wenn es keinen Index  $i \in \{1, \dots, d\}$  gibt, sodass gleichzeitig  $e_i \in S$  und  $-e_i \in S$ .

*Beweis:*

- a) Sei  $S$  eine Teilmenge mit der angegebenen Eigenschaft. Dann ist  $S = \{\sigma_{i_1}e_{i_1}, \dots, \sigma_{i_k}e_{i_k}\}$  für gewisse Indizes  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq d$  und gewisse Vorzeichen  $\sigma_{i_j} \in \{1, -1\}$ . Sei nun  $H$  die Hyperebene mit folgender Gleichung:  $\sigma_{i_1}x_{i_1} + \dots + \sigma_{i_k}x_{i_k} = 1$ . Dann gilt offensichtlich  $\sigma_{i_j}e_{i_j} \in H$  für alle  $j \in \{1, \dots, k\}$ , und alle anderen Ecken von  $Q_d$  liegen in  $H^-$ . Also ist  $H$  eine Stützhyperebene von  $Q_d$ , und  $H \cap \text{vert } Q_d = S$ . Somit ist (auf Grund von Satz 3.117) die zugehörige Seite  $H \cap Q_d = \text{conv } S$ .
- b) Sei andererseits  $S$  eine Teilmenge von  $\{e_1, -e_1, \dots, e_d, -e_d\}$  mit (o.B.d.A.)  $e_1 \in S$  und  $-e_1 \in S$ . Wäre  $\text{conv } S$  eine Seite von  $Q_d$ , dann gäbe es eine Stützhyperebene  $H$  mit  $S \subset H$ . Insbesondere müsste also  $e_1 \in H$  und  $-e_1 \in H$  sein und folglich auch  $o = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}(-e_1) \in H$ . Sei  $a_1x_1 + \dots + a_dx_d = \beta$  die Gleichung von  $H$ . Dann folgt durch Einsetzen von  $o$  sofort  $\beta = 0$ . Da  $H$  eine Stützhyperebene ist, wäre (für alle  $i \in \{1, \dots, d\}$ )  $e_i \in \overline{H^-}$  und  $-e_i \in \overline{H^-}$ , und daraus würde  $a_i \leq 0$  und  $a_i \geq 0$  folgen. Es wären also alle  $a_i = 0$ , und das ist bei einer Hyperebenengleichung nicht zulässig.  $\square$

Die betrachteten Teilmengen von  $\{e_1, -e_1, \dots, e_d, -e_d\}$  sind linear unabhängig und daher erst recht affin unabhängig. Daher sehen wir von jeder dadurch definierten Seite sofort die Dimension:  $\dim(\text{conv}\{\sigma_{i_1}e_{i_1}, \dots, \sigma_{i_k}e_{i_k}\}) = k - 1$ . Es ist daher auch nicht schwer, die Anzahl der  $k$ -dimensionalen Seiten eines Kreuzpolytops festzustellen:

**Folgerung 3.122** Die Anzahl der  $k$ -Seiten des  $d$ -dimensionalen Kreuzpolytops beträgt  $\binom{d}{k+1} 2^{k+1}$ .

*Beweis:* Die  $k$ -Seiten von  $Q_d$  entsprechen den  $(k+1)$ -elementigen Teilmengen von  $\{e_1, \dots, e_d\}$ , wobei noch jedes Element mit einem Vorzeichen zu versehen ist. Es gibt  $\binom{d}{k+1}$  solche Teilmengen, und bei jeder Teilmenge  $2^{k+1}$  Möglichkeiten für die Vorzeichen. Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

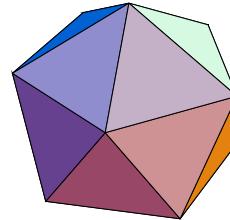
Insbesondere sehen wir also:  $Q_d$  hat  $2d$  Ecken und  $2^d$  Facetten. Die Ecken sind genau die Punkte  $\pm e_i$ .

**Definition 3.123** Ein konvexes Polytop heißt **simplizial**, wenn alle seine Seiten Simplizes sind.

Ein simpliziales 3-Polytop nennt man auch *Dreieckspolyeder*.

*Beispiele:*

- 1) Jedes Simplex ist simplizial, denn jede Teilmenge der Eckenmenge eines Simplex ist affin unabhängig.
- 2) Die Kreuzpolytope sind simplizial: Wie wir oben gesehen haben, ist jede  $k$ -Seite eines  $d$ -Kreuzpolytops von der Gestalt  $\text{conv}\{\sigma_{i_1}e_{i_1}, \dots, \sigma_{i_{k+1}}e_{i_{k+1}}\}$ , und das ist ein  $k$ -Simplex.
- 3) Das reguläre Ikosaeder (siehe untenstehende Abbildung und Beispiel 2 in Kapitel 4.1.3) ist ein weiteres Beispiel für ein simpliziales Polytop.



**Bemerkung 3.124** Ein konvexes Polytop ist genau dann simplizial, wenn alle seine Facetten Simplizes sind.

Zum *Beweis*: Man kann zeigen, dass jede  $k$ -Seite eine  $d$ -Polytops  $P$  mit  $k < d-1$  Seite einer Facette von  $P$  ist. Daraus folgt dann sofort die Behauptung.  $\square$

Wir wissen bereits, dass jede abgeschlossene konvexe Menge als Durchschnitt von Halbräumen dargestellt werden kann (Folgerung 3.110). Das Besondere von konvexen Polytopen ist es, dass man sie als Durchschnitt von *endlich vielen* Halbräumen darstellen kann, wie wir im Folgenden sehen werden.

Wir überlegen uns nun zunächst einige Hilfssätze.

**Hilfssatz 3.125** Seien  $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^d \setminus \{o\}$ . Dann gibt es einen Vektor  $v \in \mathbb{R}^d$ , sodass  $u_i \cdot v \neq 0$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

*Bemerkung:* Zu je endlich vielen Vektoren  $\neq o$  des  $\mathbb{R}^d$  gibt es also immer einen Vektor, der auf keinen der gegebenen Vektoren senkrecht steht. Man kann das auch so ausdrücken: Seien  $H_1, \dots, H_n$  endlich viele Hyperebenen des  $\mathbb{R}^d$ , die durch den Ursprung gehen. Dann ist die Vereinigung dieser Hyperebenen sicher nicht der ganze  $\mathbb{R}^d$ . (Betrachten Sie die Hyperebenen mit Gleichung  $u_i \cdot x = 0$ .) In dieser Formulierung erscheint der Satz intuitiv fast selbstverständlich.

*Beweis mit Induktion nach d:*

Der Fall  $d = 1$  ist trivial, denn jede reelle Zahl  $v \neq 0$  erfüllt die Bedingung.

Schluss von  $d - 1$  auf  $d$ :

Für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  sei  $u'_i \in \mathbb{R}^{d-1}$  der Vektor, der aus  $u_i$  durch Weglassung der letzten Koordinate entsteht. Wir können daher schreiben:  $u_i = (u_{i1}, \dots, u_{id})$ ,  $u'_i = (u_{i1}, \dots, u_{i,d-1})$ .

Von den Vektoren  $u'_i$  sind möglicherweise einige gleich  $o$ . Auf die übrigen können wir aber die Induktionsvoraussetzung anwenden. Das heißt, es gibt ein  $v' \in \mathbb{R}^{d-1}$ , sodass  $u'_i \cdot v' \neq 0$  für alle  $i$  mit  $u'_i \neq o$ .

Durch eventuelle Multiplikation von  $v'$  mit einem genügend großen Skalar können wir erreichen, dass sogar  $|u'_i \cdot v'| > 1$  für alle  $i$  mit  $u'_i \neq o$ .

Sei nun  $v_d$  eine reelle Zahl  $\neq 0$ , sodass  $|u_{id} v_d| < 1$  für alle  $i$ . Dann gilt mit  $v' = (v_1, \dots, v_{d-1})$  und  $v = (v_1, \dots, v_{d-1}, v_d)$ :

$|u_i \cdot v| = |u'_i \cdot v' + u_{id} v_d| \geq |u'_i \cdot v'| - |u_{id} v_d| > 0$ , und daher  $u_i \cdot v \neq 0$  für alle  $i$  mit  $u'_i \neq o$ .

Für die Indizes  $i$  mit  $u'_i = o$  ist  $u_{id} \neq o$  und daher  $u_i \cdot v = u_{id} v_d \neq 0$ . Damit ist die Behauptung bewiesen.  $\square$

**Hilfssatz 3.126** *Sei  $S$  eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^d$ , die in der Vereinigung von endlich vielen Hyperebenen enthalten ist. Dann hat  $S$  keine inneren Punkte.*

*Beweis:* Sei  $S \subset H_1 \cup \dots \cup H_n$  mit  $H_i = \{x \in \mathbb{R}^d : u_i \cdot x = \beta_i\}$ . Gemäß vorigem Hilfssatz gibt es einen Vektor  $v$  mit  $u_i \cdot v \neq 0$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Wir können natürlich annehmen, dass  $v$  normiert ist, d.h.  $\|v\| = 1$ .

Angenommen,  $S$  enthält einen inneren Punkt  $p$ . Die Gerade  $G := \{p + \lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$  ist in keiner Hyperebene  $H_i$  enthalten, da  $v$  in keinem der zugehörigen Richtungsräume liegt. Der Durchschnitt von  $G$  mit  $S$  besteht somit aus höchstens  $n$  Punkten.

Wenn  $p$  ein innerer Punkt von  $S$  ist, dann gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , sodass  $K(p, \varepsilon) \subset S$ . Dann wäre  $G \cap K(p, \varepsilon) \subset G \cap S$ , also würde auch  $G \cap K(p, \varepsilon)$  aus höchstens  $n$  Punkten bestehen. Andererseits gilt aber  $G \cap K(p, \varepsilon) = \{p + \lambda v : -\varepsilon < \lambda < \varepsilon\}$ , und das ist offensichtlich eine unendliche Menge.  $\square$

**Satz 3.127** *Jedes konvexe Polytop mit inneren Punkten ist gleich dem Durchschnitt der durch seine Facetten bestimmten abgeschlossenen Halbräume.*

*Beweis:*

Seien  $F_1, \dots, F_s$  die Facetten des Polytops  $P$ . Es gibt dann Stützhyperebenen  $H_i$  mit  $H_i \cap P = F_i$ . Klarerweise ist  $P \subset \bigcap_{i=1}^s \overline{H_i}$ . Angenommen, es gibt ein  $x \in \bigcap \overline{H_i} \setminus P$ .

Sei  $D$  die Vereinigung aller affinen Teilräume, welche von  $x$  und je  $d-1$  Ecken von  $P$  aufgespannt werden.  $D$  ist also eine Vereinigung von endlich vielen affinen Teilräumen mit Dimension  $< d$  und kann daher auf Grund von Hilfssatz 3.126 keine Kugel enthalten. Insbesondere ist  $\text{int } P$  sicherlich nicht in  $D$  enthalten, d.h. es gibt ein  $y \in \text{int } P \setminus D$ . Der Durchschnitt  $[x, y] \cap P$  ist abgeschlossen und konvex und enthält  $y$ , er muss also nach Bemerkung 3.66 von der Form  $[z, y]$  sein, mit einem Randpunkt  $z$  von  $P$ . Wir zeigen, dass  $z$  auf einer Facette von  $P$  liegt. Es gibt jedenfalls eine Stützhyperebene  $H$  durch  $z$ , also ist  $F := H \cap P$  eine Seite von  $P$  mit  $z \in F$ . Sei  $r := \dim F$ . Nach Satz 3.114 ist  $F$  die konvexe Hülle gewisser Ecken von  $P$ . Nach dem Satz von Carathéodory (angewendet auf die affine Hülle von  $F$  an Stelle von  $\mathbb{R}^d$ ) gibt es daher  $r+1$  Ecken  $v_1, \dots, v_{r+1}$  von  $P$ , sodass  $z \in \text{conv} \{v_1, \dots, v_{r+1}\}$ . Da  $x \neq z$ , liegt  $y$  auf der Verbindungsgeraden von  $x$  und  $z$  und daher in der affinen Hülle von  $\{x, v_1, \dots, v_{r+1}\}$ . Wäre  $r+1 < d$ , so würde daraus  $y \in D$  folgen, ein Widerspruch. Also ist  $r+1 = d$ , d.h.  $r = d-1$ .  $F$  ist also eine Facette, sagen wir  $F = F_1$  und somit  $H = H_1$ .

$x \in \overline{H_1}$  und  $y \in \text{int } P \subset \text{int } \overline{H_1} = H_1$ . Nach Hilfssatz 3.95 folgt daraus  $z \in H_1$ , im Widerspruch zu  $z \in H = H_1$ .  $\square$

Der nächste Satz stellt gewissermaßen die Umkehrung des vorigen Satzes dar.

**Satz 3.128** *Jede beschränkte polyedrische Menge ist ein konvexes Polytop.*

*Beweis:*

Sei  $Q = \bigcap_{i=1}^n \overline{H_i}$  eine beschränkte  $s$ -dimensionale polyedrische Menge.

Entweder ist  $H_i \cap Q$  leer, oder  $H_i$  ist eine Stützhyperebene von  $Q$ . Wenn wir die leere Menge auch als Seite zulassen, dann ist also  $F_i := H_i \cap Q$  in jedem Fall eine Seite von  $Q$ , mit  $-1 \leq \dim F_i \leq s$ .

Sei  $L = \text{aff } Q$ , also  $\dim L = s$ .

Wir wählen die Nummerierung so, dass

$\dim F_i < s$  für  $i \in \{1, \dots, p\}$ ,

$\dim F_i = s$  für  $i \in \{p+1, \dots, n\}$ .

Wenn  $\dim F_i = s$ , dann ist  $\text{aff } F_i = L$ , also  $L \subset H_i \subset \overline{H_i^-}$ . Daher können wir diese Hyperebenen weglassen, wenn wir  $Q$  in folgender Weise darstellen:

$$Q = L \cap \bigcap_{i=1}^n \overline{H_i^-} = L \cap \bigcap_{i=1}^p \overline{H_i^-} = \bigcap_{i=1}^p (L \cap \overline{H_i^-}).$$

Wir betrachten von nun an  $Q$  als polyedrische Teilmenge des affinen Raums  $L$ , dargestellt durch die Halbräume  $L \cap \overline{H_i^-}$  von  $L$  (mit  $i \in \{1, \dots, p\}$ ).

Wir führen nun den Beweis mit Induktion nach der Dimension  $s$  der polyedrischen Menge.

Als Induktionsanfang betrachten wir zunächst die Fälle  $s = -1$ ,  $s = 0$  und  $s = 1$ .

$s = -1$  ist natürlich völlig trivial, denn es handelt sich dann nur um die leere Menge. Auch  $s = 0$  ist trivial, denn eine 0-dimensionale Menge besteht nur aus einem Punkt und ist daher gleich der konvexen Hülle dieses Punktes. Der Fall  $s = 1$  ergibt sich aus Bemerkung 3.66.

Sei nun  $s > 1$ , und nehmen wir an, dass der Satz für beschränkte polyedrische Mengen der Dimension  $< s$  bereits bewiesen ist.  $F_i$  ist für  $i \in \{1, \dots, p\}$  eine beschränkte polyedrische Menge mit Dimension  $< s$ . Aus der Induktionsvoraussetzung folgt daher, dass  $F_i$  ein (eventuell leeres) konvexes Polytop ist. Sei  $V_i := \text{vert } F_i$ , also  $F_i = \text{conv } V_i$  nach Satz 3.113, und  $V := \bigcup_{i=1}^p V_i$ . Wir werden nun zeigen, dass  $Q = \text{conv } V$  ist, und dann sind wir fertig.

Wegen  $V \subset Q$  und der Konvexität von  $Q$  ist  $\text{conv } V \subset Q$ . Wir haben daher nur zu zeigen, dass  $Q \subset \text{conv } V$  ist.

Sei  $x \in Q$ . Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall:  $x \in \text{rel bd } Q$ .

Dann muss  $x$  auf einer der Hyperebenen  $H_i$  liegen (Übungsaufgabe), also  $x \in H_i \cap Q = F_i = \text{conv } V_i \subset \text{conv } V$ .

2. Fall:  $x \in \text{rel int } Q$ .

Sei  $G$  eine Gerade durch  $x$ . Dann ist  $G \cap Q$  eine abgeschlossene beschränkte konvexe Teilmenge von  $G$ , also eine Strecke  $[p, q]$  mit  $p, q \in \text{rel bd } Q$ . (Das folgt wieder aus Bemerkung 3.66.) Wie wir beim 1. Fall gesehen haben, gibt es daher Seiten  $F_i$  und  $F_j$  mit  $p \in F_i$  und  $q \in F_j$ . Daher ist  $x \in [p, q] \subset \text{conv}(F_i \cup F_j)$ . Wegen  $F_i \cup F_j \subset \text{conv}(V_i \cup V_j)$  erhalten wir:  $x \in \text{conv}(V_i \cup V_j) \subset \text{conv } V$ .  $\square$

Die beiden letzten Sätze können wir folgendermaßen zusammenfassen:

**Satz 3.129** *Eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^d$  ist genau dann ein konvexes Polytop, wenn sie eine beschränkte polyedrische Menge ist.*

*Beweis (Skizze):* Es ist nur noch der Fall eines konvexen Polytops  $P$  ohne innere Punkte zu klären. Sei  $L$  die affine Hülle von  $P$ .  $L$  ist nach Folgerung 3.91 ein affiner Teilraum des  $\mathbb{R}^d$  mit Dimension  $s < d$ . Es gibt eine Affinität  $\alpha$  von  $L$  auf den  $\mathbb{R}^s$ , welche  $P$  auf ein  $s$ -dimensionales konvexes Polytop  $P'$  im  $\mathbb{R}^s$  abbildet (siehe Satz 3.58 und Bemerkung 3.73).  $P'$  enthält innere Punkte und ist daher gleich dem Durchschnitt der durch seine Facetten bestimmten abgeschlossenen Halbräume. Die Bilder dieser Halbräume unter der Affinität  $\alpha^{-1}$  sind Halbräume von  $L$  (siehe Bemerkung 3.68), also von der Form  $\overline{H_i^-} \cap L$  mit Halbräumen  $\overline{H_i^-}$  des  $\mathbb{R}^d$ .

$L$  ist so wie jeder affine Teilraum als Durchschnitt von Hyperebenen darstellbar, und jede Hyperebene ist wiederum der Durchschnitt der beiden zugehörigen abgeschlossenen Halbräume. Daher sehen wir, dass  $P = \alpha^{-1}(P')$  als Durchschnitt von abgeschlossenen Halbräumen darstellbar ist.  $\square$

### Anwendung: Lineare Optimierung

Bei der linearen Optimierung geht es um die Lösung von Aufgaben der folgenden Art: Sei  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  eine lineare Funktion, und  $P$  sei eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^d$ , welche durch endlich viele lineare Ungleichungen gegeben ist, z.B. so:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^d : a_1 \cdot x \leq \beta_1, \dots, a_n \cdot x \leq \beta_n\}.$$

Gesucht ist das Maximum von  $f$ , eingeschränkt auf die Menge  $P$ , sowie die Stelle dieses Maximums.

$P$  ist offensichtlich eine abgeschlossene polyedrische Menge. Wenn  $P$  nicht beschränkt ist, kann es sein, dass  $f$  kein (endliches) Maximum besitzt. Man

setzt daher meist voraus, dass  $P$  beschränkt ist. Dann ist  $P$  also ein konvexes Polytop, und es stellt sich heraus, dass das Maximum von  $f$  in einer Ecke von  $P$  angenommen wird, wie wir gleich sehen werden. Zur Bestimmung des Maximums genügt es daher, die Funktionswerte von  $f$  in allen Ecken von  $P$  zu berechnen. Das ist jedenfalls in endlich vielen Schritten möglich. Zur Abschätzung der Rechenzeit ist aber natürlich von Bedeutung, eine Schranke für die Anzahl der Ecken eines Polytops zu kennen, das durch  $n$  lineare Ungleichungen gegeben ist. (Mehr darüber im Abschnitt 3.4.9.)

**Satz 3.130** *Sei  $f$  eine lineare Funktion  $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  und  $P$  ein konvexes Polytop im  $\mathbb{R}^d$ . Dann gibt es eine Ecke  $v$  von  $P$ , sodass  $f(v) = \max\{f(x) : x \in P\}$ .*

*Beweis:*

$f$  ist stetig, und  $P$  ist eine abgeschlossene beschränkte Teilmenge des  $\mathbb{R}^d$ . Daher wird bekanntlich das Maximum von  $f$  über  $P$  in einem Punkt  $x_0 \in P$  angenommen (siehe Vorlesungen über Analysis).

Seien  $v_1, \dots, v_n$  die Ecken von  $P$ . Nach Satz 3.113 ist  $P$  gleich der konvexen Hülle von  $\{v_1, \dots, v_n\}$ . Daher gibt es  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$  mit  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ , sodass  $x_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ . Angenommen,  $f(v_i) < f(x_0)$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Dann wäre

$$f(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(v_i) < \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_0) = f(x_0),$$

ein Widerspruch. (Es gilt wirklich das strikte Ungleichheitszeichen, da mindestens ein  $\lambda_i > 0$  sein muss.)  $\square$

*Bemerkung:* Für die praktische Berechnung des Maximums einer linearen Funktion über einem konvexen Polytop gibt es ein bewährtes Verfahren, den so genannten *Simplexalgorithmus* von George Dantzig (1947), bei dem normalerweise bei weitem nicht alle Ecken des Polytops durchprobiert werden müssen. (Siehe Vorlesungen oder Bücher über Optimierung.)

### 3.4.7 Polarität

#### Polarität von konvexen Mengen

**Definition 3.131** *Sei  $C$  eine beliebige Teilmenge des  $\mathbb{R}^d$ . Unter der zu  $C$  **polaren Menge** verstehen wir*

$$C^* := \{x \in \mathbb{R}^d : c \cdot x \leq 1 \text{ für alle } c \in C\}.$$

Wir könnten auch schreiben:

$$C^* = \bigcap_{c \in C} \overline{H_c^-}$$

wobei  $H_c$  die Hyperebene mit Gleichung  $c \cdot x = 1$  ist. Diese Hyperebene nennt man auch die *Polare von  $c$  bezüglich der Einheitskugel*. Es ist aber darauf zu achten, dass die *polare Menge* von  $\{c\}$  etwas anderes ist, nämlich der Halbraum  $\overline{H_c^-}$ .

$C^*$  ist also jedenfalls eine abgeschlossene konvexe Menge.

Der Begriff "polare Menge" hat vor allem für konvexe Mengen Bedeutung.

**Beispiel 3.132** Die polare Menge zu der Kugel  $\overline{K}(o, r)$  ist die Kugel  $\overline{K}(o, 1/r)$ .

*Beweis:* Sei  $c \in \overline{K}(o, r)$  und  $x \in \overline{K}(o, 1/r)$ , d.h.  $\|c\| \leq r$  und  $\|x\| \leq 1/r$ . Dann folgt  $c \cdot x \leq \|c\| \|x\| \leq 1$ . Daher ist  $\overline{K}(o, 1/r) \subset (\overline{K}(o, r))^*$ .

Angenommen, es gibt ein  $x_0 \in (\overline{K}(o, r))^*$  mit  $x_0 \notin \overline{K}(o, 1/r)$ , d.h.  $\|x_0\| > 1/r$ . Dann folgt mit  $c_0 := \frac{r}{\|x_0\|} x_0$ :  $c_0 \in \overline{K}(o, r)$ , aber  $c_0 \cdot x_0 = r \|x_0\| > 1$ , Widerspruch.  $\square$

Die folgenden Bemerkungen sind Beispiele dafür, dass sich beim Übergang zur polaren Menge viele Eigenschaften in gewissem Sinne umkehren.

**Bemerkung 3.133** Wenn  $C_1 \subset C_2$ , dann ist  $C_1^* \supset C_2^*$ .

*Beweis:* Sei  $x \in C_2^*$ . Dann gilt  $c \cdot x \leq 1$  für alle  $c \in C_2$  und daher erst recht für alle  $c \in C_1$ . Folglich ist  $x \in C_1^*$ .  $\square$

**Bemerkung 3.134** Wenn  $o$  ein innerer Punkt von  $C$  ist, dann ist  $C^*$  beschränkt.

*Beweis:* Wegen  $o \in \text{int } C$  gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , sodass  $\overline{K}(o, \varepsilon) \subset C$ . Nach der vorhergehenden Bemerkung ist daher  $C^* \subset (\overline{K}(o, \varepsilon))^* = \overline{K}(o, 1/\varepsilon)$  und somit  $C^*$  beschränkt.  $\square$

**Bemerkung 3.135** Wenn  $C$  beschränkt ist, dann ist  $o$  ein innerer Punkt von  $C^*$ .

*Beweis:* Wenn  $C^*$  beschränkt ist, dann gibt es ein  $r > 0$ , sodass  $C \subset \overline{K}(o, r)$ . Dann folgt aber  $\overline{K}(o, 1/r) = \overline{K}(o, r)^* \subset C^*$ , und daher ist  $o$  ein innerer Punkt von  $C^*$ .

Aus den letzten zwei Bemerkungen folgt: Wenn  $C$  beschränkt ist und  $o$  als inneren Punkt enthält, dann hat auch  $C^*$  diese beiden Eigenschaften.

**Satz 3.136** *Sei  $C$  eine abgeschlossene konvexe Menge im  $\mathbb{R}^d$  mit  $o \in C$ . Dann ist  $(C^*)^* = C$ .*

Dieser Satz drückt aus, dass die Beziehung zwischen  $C$  und  $C^*$  symmetrisch ist (für abgeschlossene konvexe Mengen, die den Ursprung enthalten). Man könnte ihn auch so formulieren:  $C_2$  ist genau dann zu  $C_1$  polar, wenn  $C_1$  zu  $C_2$  polar ist:  $C_2 = C_1^* \Leftrightarrow C_1 = C_2^*$ .

**Bemerkung 3.137** *Es hat daher einen Sinn, wenn man  $C$  und  $C^*$  **zueinander polar** nennt.*

*Beweis des Satzes:*

Zunächst sieht man leicht, dass  $C \subset (C^*)^*$ :  $c \in C$  impliziert  $c' \cdot c = c \cdot c' \leq 1$  für alle  $c' \in C^*$ , und das heißt  $c \in (C^*)^*$ .

Angenommen, es gibt ein  $x_0 \in (C^*)^* \setminus C$ . Dann gibt es eine  $x_0$  und  $C$  strikt trennende Hyperebene  $H$ , sagen wir  $C \subset H^-$  und  $x_0 \in H^+$ . Da  $o \in C$ , geht  $H$  nicht durch  $o$ , und wir können daher annehmen, dass die Gleichung von  $H$  die Form  $a \cdot x = 1$  hat. Es würde also folgen:

- a)  $a \cdot x_0 > 1$ ,
- b)  $a \cdot c < 1$  für alle  $c \in C$ .

Aus b) folgt  $c \cdot a \leq 1$  für alle  $c \in C$ , also  $a \in C^*$ . Das ist aber ein Widerspruch, denn wenn  $a \in C^*$  ist, muss  $a \cdot x \leq 1$  für alle  $x \in (C^*)^*$  sein, also insbesondere für  $x = x_0$ .  $\square$

### Polarität von konvexen Polytopen

Die polaren Mengen von konvexen Polytopen verdienen besonderes Interesse:

**Satz 3.138** *Sei  $P$  ein konvexes Polytop im  $\mathbb{R}^d$  mit  $o \in \text{int } P$ . Dann ist  $P^*$  ebenfalls ein konvexes Polytop, und zwar gilt*

$$P^* = \{x \in \mathbb{R}^d : v \cdot x \leq 1 \text{ für alle } v \in \text{vert } P\} = (\text{vert } P)^*.$$

Wenn  $\{v_1, \dots, v_n\}$  die Ecken von  $P$  sind, dann gilt also

$$P^* = \bigcap_{i=1}^n \overline{H_i^-} \text{ mit } \overline{H_i^-} = \{x \in \mathbb{R}^d : v_i \cdot x \leq 1\},$$

d.h.  $P^*$  wird von den Polaren der Ecken von  $P$  (bezüglich der Einheitskugel) begrenzt.

Wegen  $o \in \text{int } P$  ist  $P^*$  eine beschränkte polyedrische Menge und somit ein konvexes Polytop. Man nennt es natürlich *das zu  $P$  polare Polytop*.

*Beispiel:* Sei  $e_i$  der  $i$ -te kanonische Basisvektor des  $\mathbb{R}^d$ . Das zum Kreuzpolytop  $Q_d := \text{conv}\{\pm e_i : i \in \{1, \dots, d\}\}$  polare Polytop ist der  $d$ -dimensionale Würfel (kurz:  $d$ -Würfel)

$$\begin{aligned} W_d &:= \{x \in \mathbb{R}^d : -1 \leq e_i \cdot x \leq 1 \text{ für alle } i \in \{1, \dots, d\}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^d : |x_i| \leq 1 \text{ für alle } i \in \{1, \dots, d\}\} = [-1, 1]^d. \end{aligned}$$

(Für  $d > 3$  nennt man  $W_d$  auch *Hyperwürfel*.)

*Beweis von Satz 3.138:*

Da  $P^*$  beschränkt ist, genügt es,  $P^* = (\text{vert } P)^*$  zu zeigen.

Wegen  $\text{vert } P \subset P$  sehen wir sofort:  $P^* \subset (\text{vert } P)^*$ .

Zum Beweis der umgekehrten Inklusion sei  $x \in (\text{vert } P)^*$ , also  $v_i \cdot x \leq 1$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Jeder Punkt  $c \in P$  kann als Konvexitätskombination der Ecken dargestellt werden:  $c = \sum \lambda_i v_i$  mit  $\lambda_i \geq 0$  und  $\sum \lambda_i = 1$ , und daher gilt  $c \cdot x = \sum \lambda_i (v_i \cdot x) \leq \sum \lambda_i 1 = 1$  für alle  $c \in P$ , d.h.  $x \in P^*$ .  $\square$

Das Interessante ist nun, dass die Ecken von  $P$  den Facetten von  $P^*$  entsprechen, und umgekehrt die Facetten von  $P$  den Ecken von  $P^*$ . Das ergibt sich aus den nächsten Sätzen.

**Satz 3.139** *Sei  $P$  ein konvexes Polytop mit  $o \in \text{int } P$ , und  $F$  sei eine Seite von  $P$ . Dann ist*

$$F^\Delta := \{x \in P^* : c \cdot x = 1 \text{ für alle } c \in F\}$$

*eine Seite von  $P^*$ .*

**Definition 3.140**  $F^\Delta$  heißt die zu  $F$  **konjugierte Seite** (von  $P^*$ ).

$F^\Delta$  ist also der Durchschnitt aller Hyperebenen, welche Polare von Punkten aus  $F$  sind, mit  $P^*$ :

$$F^\Delta = P^* \cap \bigcap_{c \in F} H_c$$

mit  $H_c = \{x : c \cdot x = 1\}$ .

$F^\Delta$  ist natürlich von  $P$  bzw.  $P^*$  abhängig, obwohl das in der Bezeichnung nicht zum Ausdruck kommt.

**Bemerkung 3.141**  $\emptyset^\Delta = P^*$  und  $P^\Delta = \emptyset$ .

*Beweis dieser Bemerkung:*  $\emptyset^\Delta = \{x \in P^* : c \cdot x = 1 \text{ für alle } c \in \emptyset\} = P^*$ ;

$P^\Delta = \{x \in P^* : c \cdot x = 1 \text{ für alle } c \in P\} = \emptyset$ , denn  $o \in P$  und  $o \cdot x = 0$  für alle  $x$ .  $\square$

Wir können uns also im Folgenden auf eigentliche Seiten beschränken.

*Beweis von Satz 3.139:*

Seien  $\{v_1, \dots, v_s\}$  die Ecken von  $F$ , und  $c_0 := \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s v_i$  (das ist der Schwerpunkt der Ecken). Wegen der Konvexität von  $F$  liegt  $c_0$  natürlich in  $F$ .

Betrachten wir nun die Hyperebene  $H_0 := \{x : c_0 \cdot x = 1\}$  (das ist die Polare von  $c_0$ ) und überlegen uns, dass sie ein Stützhyperebene von  $P^*$  ist.

$P^* \subset \overline{H_0^-}$ , da  $c_0 \in P$ . Um zu zeigen, dass  $H_0 \cap P^* \neq \emptyset$  ist, betrachten wir eine Stützhyperebene  $H$  von  $P$ , sodass  $F = H \cap P$ . Wegen  $o \in \text{int } P$  geht  $H$  nicht durch  $o$ . Es gibt daher ein  $a \in \mathbb{R}^d \setminus \{o\}$ , sodass  $H = \{x : a \cdot x = 1\}$ . Somit ist  $a \cdot x = 1$  für alle  $x \in F$ , also insbesondere  $a \cdot c_0 = 1$ . Es folgt  $a \in H_0$ .

Andererseits ist  $P \subset \overline{H_0^-}$ , das heißt  $a \cdot x \leq 1$  für alle  $x \in P$ , also  $a \in P^*$ .

Zusammen ergibt das  $a \in H_0 \cap P^*$ , und wir sehen, dass  $H_0$  tatsächlich eine Stützhyperebene von  $P^*$  ist. Wenn wir zeigen können, dass  $F^\Delta = H_0 \cap P^*$  ist, sind wir fertig.

Zunächst ist trivialerweise  $F^\Delta \subset H_0$  und  $F^\Delta \subset P^*$ , also  $F^\Delta \subset H_0 \cap P^*$ . Angenommen, es gibt ein  $a_1 \in H_0 \cap P^*$  mit  $a_1 \notin F^\Delta$ . Dann müsste es ein  $c_1 \in F$  geben mit  $c_1 \cdot a_1 \neq 1$ . Wegen  $a_1 \in P^*$  wäre dann

$$c_1 \cdot a_1 < 1 \tag{*}$$

sowie

$$v_i \cdot a_1 \leq 1 \text{ für alle } i \in \{1, \dots, s\}.$$

Wegen  $a_1 \in H_0$  wäre andererseits  $c_0 \cdot a_1 = 1$ , das heißt  $\frac{1}{s} \sum_{i=1}^s (v_i \cdot a_1) = 1$ . Das ist aber nur möglich, wenn

$$v_i \cdot a_1 = 1 \text{ für alle } i \in \{1, \dots, s\}.$$

$c_1$  lässt sich als Konvexitätskombination dieser  $v_i$  darstellen, sagen wir  $c_1 = \sum_{i=1}^s \lambda_i v_i$  mit  $\lambda_i \geq 0$  und  $\sum \lambda_i = 1$ . Dann würde aber folgen:

$$c_1 \cdot a_1 = \sum_{i=1}^s \lambda_i (v_i \cdot a_1) = \sum_{i=1}^s \lambda_i 1 = 1, \text{ im Widerspruch zu } (*). \square$$

**Satz 3.142** *Sei  $F$  eine Seite eines konvexen  $d$ -Polytops  $P$  mit  $o \in \text{int } P$ . Dann gilt  $(F^\Delta)^\Delta = F$ .*

**Bemerkung 3.143** *Es hat daher einen Sinn, wenn man sagt,  $F$  und  $F^\Delta$  sind **zueinander konjugiert**.*

*Beweis des Satzes:*

Wir können die Definition von  $F^\Delta$  auch so schreiben:  $F^\Delta = \{y \in P^* : x \cdot y = 1 \text{ für alle } x \in F\}$ .

$y \in F^\Delta$  bedeutet also

$$x \cdot y \leq 1 \text{ für alle } x \in P$$

und

$$x \cdot y = 1 \text{ für alle } x \in F.$$

$y \in F^\Delta$  ist somit gleichbedeutend damit, dass  $H_y := \{x : x \cdot y = 1\}$  eine  $F$  enthaltende Stützhyperebene von  $P$  ist. Nun ist

$$(F^\Delta)^\Delta = (P^*)^* \cap \bigcap_{y \in F^\Delta} H_y = P \cap \bigcap_{y \in F^\Delta} H_y = \bigcap_{y \in F^\Delta} (H_y \cap P).$$

Das heißt aber:  $(F^\Delta)^\Delta$  ist gleich dem Durchschnitt aller  $F$  enthaltenden Seiten von  $P$ , und das ist trivialerweise gleich  $F$ .  $\square$

**Satz 3.144** *Sei  $S$  die Menge aller (eigentlichen und uneigentlichen) Seiten eines konvexen Polytops  $P$  mit  $o \in \text{int } P$ , und  $S'$  die Menge aller Seiten von  $P^*$ . Dann ist die Abbildung*

$$S \rightarrow S' : F \mapsto F^\Delta$$

*bijektiv und inklusionsumkehrend (d.h.  $F_1 \subset F_2 \Rightarrow F_2^\Delta \subset F_1^\Delta$ ).*

*Beweis:* Die Bijektivität folgt unmittelbar aus Satz 3.142. Seien also  $F_1, F_2$  zwei Seiten von  $P$  mit  $F_1 \subset F_2$ , und  $x \in F_2^\Delta$ . Dann ist  $x \in P^*$  und  $c \cdot x = 1$  für alle  $c \in F_2$  und daher erst recht für alle  $c \in F_1$ . Es folgt  $x \in F_1^\Delta$ , was zu zeigen war.  $\square$

**Hilfssatz 3.145** *Sei  $P = \bigcap_{i=1}^n \overline{H_i^-}$  eine polyedrische Menge im  $\mathbb{R}^s$  mit  $\dim P < s$ . Dann gibt es ein  $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ , sodass  $P \subset H_{i_0}$ .*

*Beweis:* Angenommen,  $P$  ist in keiner der Hyperebenen  $H_i$  enthalten. Dann gibt es zu jedem  $i \in \{1, \dots, n\}$  ein  $x_i \in P \cap H_i^-$ .

Wir setzen  $y := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  und zeigen, dass  $y$  ein innerer Punkt von  $P$  ist. Daraus folgt dann  $\dim P = s$  im Widerspruch zur Voraussetzung.

Sei  $y_k := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i$ . Wir zeigen mit Induktion, dass  $y_k \in \bigcap_{i=1}^k H_i^-$ .

$k = 1$ :  $y_1 = x_1 \in H_1^-$ .

Schluss von  $k$  auf  $k + 1$  (für  $k < n$ ): Wir gehen von folgender Darstellung aus:

$$y_{k+1} = \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} x_i = \frac{k}{k+1} y_k + \frac{1}{k+1} x_{k+1}.$$

Für  $1 \leq i \leq k$  gilt  $y_k \in H_i^-$  (nach Induktionsvoraussetzung) und  $x_{k+1} \in \overline{H_i^-}$  (da  $x_{k+1} \in P$ ).

Für  $i = k + 1$  gilt  $y_k \in \overline{H_i^-}$  (da  $y_k \in P$ ) und  $x_{k+1} \in H_i^-$  (nach Definition der  $x_i$ ).

In beiden Fällen folgt  $y_{k+1} \in H_i^-$  (nach Hilfssatz 3.95). Somit ergibt sich  $y_{k+1} \in \bigcap_{i=1}^{k+1} H_i^-$ .

Es folgt:  $y = y_n \in \bigcap_{i=1}^n H_i^- = \text{int } P$ .  $\square$

**Satz 3.146** *Sei  $F$  eine Seite eines konvexen  $d$ -Polytops  $P$  mit  $o \in \text{int } P$  und  $F^\Delta$  die dazu konjugierte Seite von  $P^*$ . Dann ist*

$$\dim F + \dim F^\Delta = d - 1.$$

*Beweis:*

Sei  $F$  eine  $k$ -dimensionale Seite von  $P$ . Dann gibt es  $k + 1$  affin unabhängige Ecken von  $F$ . Seien  $v_0, \dots, v_k$  diese Ecken.

Es gibt eine Stützhyperebene  $H$  von  $P$  mit  $F = H \cap P$ . Wegen  $o \in \text{int } P$  ist  $o \notin H$  und daher auch  $\notin \text{aff } F$ . Die Punkte  $o, v_0, \dots, v_k$  sind daher affin unabhängig, und das heißt, dass die Vektoren  $v_0, \dots, v_k$  linear unabhängig sind.

Auf Grund der Definition von  $F^\Delta$  ist  $F^\Delta \subset \bigcap_{i=0}^k H_i =: L$  (mit  $H_i := \{x : v_i \cdot x = 1\}$ ).

$L$  ist die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems, welches aus den Gleichungen  $v_i \cdot x = 1$  mit  $i \in \{0, \dots, k\}$  besteht. Die Matrix dieses Gleichungssystems besteht aus den  $k+1$  linear unabhängigen Zeilenvektoren  $v_0, \dots, v_k$  und hat daher den Rang  $k+1$ . Daraus folgt:

$$\dim F^\Delta \leq \dim L = d - (k+1) = (d-1) - \dim F.$$

Es ist also nur zu zeigen, dass die Dimension von  $F^\Delta$  nicht kleiner als  $(d-1) - \dim F$  sein kann. Seien dazu  $v_0, \dots, v_k, \dots, v_r$  alle Ecken von  $F$ . Zunächst sehen wir, dass

$$L = \{x : v_i \cdot x = 1 \text{ für alle } i \in \{0, \dots, r\}\},$$

denn jede der Ecken  $v_{k+1}, \dots, v_r$  lässt sich als Affinkombination von  $v_0, \dots, v_k$  darstellen. Weiters gilt

$$\begin{aligned} F^\Delta &= \{x \in P^* : c \cdot x = 1 \text{ für alle } c \in F\} \\ &= \{x \in P^* : v_i \cdot x = 1 \text{ für alle } i \in \{0, \dots, r\}\} \\ &= P^* \cap L, \end{aligned}$$

denn jedes  $c \in F$  lässt sich als Affinkombination dieser  $v_i$  darstellen. Sind  $v_{r+1}, \dots, v_n$  die übrigen Ecken von  $P$ , so gilt  $P^* = \bigcap_{i=0}^n \overline{H_i^-}$  und somit

$$F^\Delta = \bigcap_{i=r+1}^n \overline{H_i^-} \cap L.$$

$F^\Delta$  ist hier als Durchschnitt von abgeschlossenen Halbräumen des affinen Teilraums  $L$  dargestellt. Wenden wir den Hilfssatz 3.145 auf diesen Teilraum an Stelle von  $\mathbb{R}^s$  an, so sehen wir: Wäre  $\dim F^\Delta < \dim L$ , dann gäbe es ein  $i_0 \in \{r+1, \dots, n\}$  sodass  $F^\Delta \subset H_{i_0}$ . Das hieße  $c \cdot v_{i_0} = 1$  für alle  $c \in F^\Delta$ , und das wiederum hieße  $v_{i_0} \in (F^\Delta)^\Delta = F$ , ein Widerspruch.  $\square$

Sehen wir uns die Spezialfälle  $\dim F = 0$  und  $\dim F = d-1$  genauer an. (Wir unterscheiden dabei der Einfachheit halber nicht zwischen  $v$  und  $\{v\}$ .)

**Bemerkung 3.147** 1) Sei  $v$  eine Ecke von  $P$ . Dann ist  $v^\Delta = \{x \in P^* : v \cdot x = 1\}$  eine Facette von  $P^*$  mit zugehöriger Hyperebene  $H_v = \{x : v \cdot x = 1\}$ . Für jede Ecke  $v$  von  $P$  gilt also

$$v^\Delta = H_v \cap P^*.$$

2) Sei  $F$  eine Facette von  $P$  mit zugehöriger Hyperebene  $H_v = \{x : v \cdot x = 1\}$ . Dann gilt für alle  $c \in F$  natürlich  $v \cdot c = 1$ , das heißt  $c \cdot v = 1$ , und daraus folgt  $v \in F^\Delta$ . Da  $F^\Delta$  eine Ecke ist, ergibt sich  $F^\Delta = v$ . Für jede Facette  $F = H_v \cap P$  von  $P$  gilt also

$$(H_v \cap P)^\Delta = v.$$

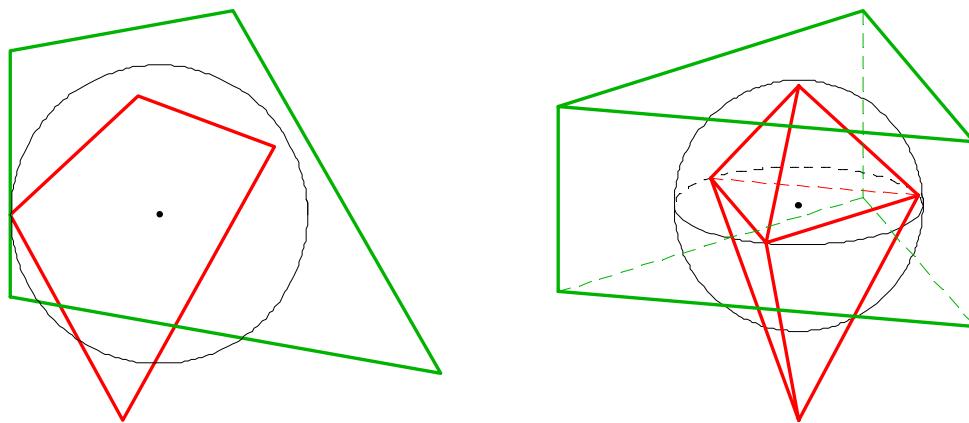
Die folgende Bemerkung ergibt sich nun auf Grund von Satz 3.144.

**Bemerkung 3.148** Wenn  $v_1, \dots, v_k$  Ecken der Facette  $F$  von  $P$  sind, dann sind  $v_1^\Delta, \dots, v_k^\Delta$  Facetten von  $P^*$ , welche die Ecke  $F^\Delta$  enthalten.

Wenn  $F_1, \dots, F_k$  Facetten von  $P$  sind, welche die Ecke  $v$  enthalten, dann sind  $F_1^\Delta, \dots, F_k^\Delta$  Ecken der Facette  $v^\Delta$  von  $P^*$ .

**Bemerkung 3.149** Die Beziehung zwischen  $P$  und  $P^*$ , insbesondere zwischen den Seiten von  $P$  und  $P^*$ , nennt man auch **Dualität**. Dadurch wird ausgedrückt, dass sich  $P$  zu  $P^*$  genau so verhält, wie  $P^*$  zu  $P$  (vgl. auch Satz 3.136).

Die folgende Abbildung zeigt links zwei zueinander polare Polygone und rechts zwei zueinander polare 3-Polytope, zusammen mit dem Einheitskreis bzw. der Einheitskugel.



Als *Anwendungsbeispiel* können wir jetzt die Anzahl der  $k$ -Seiten eines  $d$ -dimensionalen Würfels bestimmen. Sie ist gleich der Anzahl der  $(d-1-k)$ -Seiten des  $d$ -dimensionalen Kreuzpolytops, also  $= \binom{d}{d-k} 2^{d-k} = \binom{d}{k} 2^{d-k}$ . Konkret hat also z.B. der 7-dimensionale Würfel  $2^7 = 128$  Ecken,  $7 \cdot 2^6 = 448$  Kanten und  $21 \cdot 2^5 = 672$  zweidimensionale Seiten (vgl. Titelbild von [11]).

Auf Grund der Dualität zwischen  $P$  und  $P^*$  gibt es im Prinzip zu jedem Satz über die Seiten eines konvexen  $d$ -Polytops einen dazu "dualen" Satz, der sich durch Anwendung der obigen bijektiven und inklusionsumkehrenden Abbildung ergibt. Als Beispiel sehen wir uns den folgenden Satz an:

**Satz 3.150** *Jede Facette eines konvexen  $d$ -Polytops enthält mindestens  $d$  Ecken.*

*Beweis:* Sei  $F$  eine Facette des  $d$ -Polytops  $P$  und  $V$  die Menge der in  $F$  enthaltenen Ecken von  $P$ . Nach Satz 3.117 ist  $F = \text{conv } V$ . Wenn  $V$  aus weniger als  $d$  Ecken bestünde, wäre die Dimension von  $V$  (d.h. der affinen Hülle von  $V$ ) kleiner als  $d-1$ . Daher wäre auch  $\dim F < d-1$ , und das ist ein Widerspruch.  $\square$

Der dazu duale Satz lautet:

**Satz 3.151** *Jede Ecke eines konvexen  $d$ -Polytops ist in mindestens  $d$  Facetten enthalten.*

*Beweis:* Sei  $v$  eine Ecke des  $d$ -Polytops  $P$ . O.B.d.A. können wir  $o \in \text{int } P$  annehmen. Dann ist  $v^\Delta$  eine Facette von  $P^*$  und enthält daher nach dem vorigen Satz mindestens  $d$  Ecken. Jede dieser Ecken ist zu einer Facette von  $P$  konjugiert. Es gibt also mindestens  $d$  Facetten  $F_1, \dots, F_d$  von  $P$ , sodass  $F_i^\Delta \subset v^\Delta$ , das heißt aber  $v \subset F_i$ . Damit ist die Behauptung bewiesen.  $\square$

Das zu einem  $d$ -Simplex  $S$  polare Polytop  $S^*$  hat auf Grund der Dualität genau  $d+1$  Facetten, lässt sich also als Durchschnitt von  $d+1$  Halbräumen darstellen. Der Durchschnitt von je  $d$  der entsprechenden Hyperebenen ist eine Ecke von  $S^*$  (es gibt ja nur  $d+1$  solche Durchschnitte), und sonst gibt es keine Ecken von  $S^*$  (das folgt aus dem vorigen Satz). Daraus erkennt man, dass  $S^*$  auch ein Simplex ist, und weiter sieht man, dass ein konvexes  $d$ -Polytop genau dann ein Simplex ist, wenn es  $d+1$  Facetten hat, denn das ist gleichbedeutend damit, dass das dazu polare Polytop genau  $d+1$  Ecken hat.

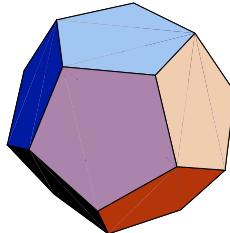
**Definition 3.152** Ein konvexes  $d$ -Polytop heißt **simpel**, wenn von jeder Ecke genau  $d$  Kanten ausgehen.

**Satz 3.153** Ein konvexes Polytop ist genau dann simpel, wenn das polare Polytop simplizial ist.

*Beweis:* Sei  $v$  eine Ecke von  $P$ . Die von  $v$  ausgehenden Kanten sind die  $v$  enthaltenden 1-Seiten. Auf Grund von Satz 3.144 entsprechen sie genau den  $(d-2)$ -Seiten von  $P^*$ , welche in der Facette  $v^\Delta$  enthalten sind. Von  $v$  gehen also genau dann genau  $d$  Kanten aus, wenn  $v^\Delta$  ein Simplex ist. (Ein konvexes  $(d-1)$ -Polytop ist auf Grund der Bemerkung vor Definition 3.152 genau dann ein Simplex, wenn es  $d$  Facetten, das heißt hier  $(d-2)$ -Seiten, hat.)  $\square$

*Beispiele:*

- a) Der Würfel  $W_d$  ist simpel, denn das dazu polare Polytop  $Q_d$  ist simplizial.
- b) Jedes Simplex ist simpel, da das dazu polare Polytop auch ein Simplex und somit simplizial ist.
- c) Ein weiteres Beispiel für ein simples Polytop ist das reguläre Dodekaeder (siehe Abbildung). Es ist zum regulären Ikosaeder (Abb. Seite 80) polar.



### 3.4.8 Der Euler'sche Polyedersatz und verwandte Gleichungen

**Definition 3.154** Die Anzahl der  $k$ -Seiten eines konvexen Polytops  $P$  bezeichnen wir mit  $f_k(P)$  oder kurz mit  $f_k$ . Das  $d$ -Tupel  $(f_0, f_1, \dots, f_{d-1})$  heißt dann der  **$f$ -Vektor** von  $P$ .

Die naheliegende Frage, welche  $d$ -Tupel natürlicher Zahlen als  $f$ -Vektoren konvexer Polytope auftreten, ist sehr schwierig und bis heute (zumindest in dieser allgemeinen Form) ungelöst. Im Folgenden werden einige notwendige Bedingungen besprochen, welche die  $f$ -Vektoren konvexer Polytope erfüllen müssen.

*Beispiel* für einen  $f$ -Vektor: Wenn  $P$  ein  $d$ -Simplex ist, dann entsprechen die  $k$ -Seiten von  $P$  genau den  $(k+1)$ -elementigen Teilmengen der Eckenmenge von  $P$ , daher ist  $f_k(P) = \binom{d+1}{k+1}$ . Der  $f$ -Vektor eines 5-Simplex zum Beispiel sieht also so aus:  $(6, 15, 20, 15, 6)$ .

Der klassische Euler'sche Polyedersatz bezieht sich auf 3-Polytope und besagt:

$$f_0 - f_1 + f_2 = 2.$$

Diese Formel lässt sich auf beliebige planare Graphen verallgemeinern und heißt dann oft einfach *Euler'sche Formel*.

Wir wollen uns jetzt aber mit dem entsprechenden Satz für konvexe Polytope beliebiger Dimension beschäftigen.

**Satz 3.155** (Euler'scher Polyedersatz) *Sei  $(f_0, f_1, \dots, f_{d-1})$  der  $f$ -Vektor eines  $d$ -Polytops. Dann gilt:*

$$\sum_{k=0}^{d-1} (-1)^k f_k = 1 - (-1)^d.$$

Setzt man  $f_d := 1$ , so kann man diese Formel auch so schreiben:

$$\sum_{k=0}^d (-1)^k f_k = 1.$$

Der Euler'sche Polyedersatz kann auch auf nichtkonvexe Polyeder verallgemeinert werden. Dann hängt die rechte Seite der Formel aber vom topologischen Typ des Polyeders ab. Beispielsweise gilt im  $\mathbb{R}^3$  für alle Polyeder, die topologisch isomorph zu einem Torus sind,  $f_0 - f_1 + f_2 = 0$ . Eine adäquate Behandlung solcher allgemeinen Polyeder ist nur im Rahmen der algebraischen Topologie möglich, wo gezeigt wird, dass  $\sum_{k=0}^{d-1} (-1)^k f_k$  eine topologische Invariante ist (die sogenannte *Euler'sche Charakteristik*).

*Beweis des Euler'schen Polyedersatzes:*

Der Beweis erfolgt durch Induktion nach der Dimension. Für  $d = 1$  besagt der Satz  $f_0 = 2$ , und das ist die triviale Aussage, dass jedes abgeschlossene beschränkte Intervall (das nicht nur aus einem Punkt besteht), zwei Ecken (= Endpunkte) besitzt. Auch für  $d = 2$  ist der Satz praktisch trivial:  $f_0 - f_1 = 0$  heißt ja einfach, dass jedes konvexe Polygon gleich viele Ecken wie Kanten hat.

Für den Induktionsschluss von  $d - 1$  auf  $d$  betrachtet man eine Schar von parallelen Hyperebenen  $H_i$ , welche das gegebene  $d$ -Polytop  $P$  schneiden, und wendet auf die Durchschnitte  $P \cap H_i$  die Induktionsvoraussetzung an. Dabei wählt man den gemeinsamen Normalvektor  $a$  dieser Hyperebenen so, dass es nicht vorkommen kann, dass eine Hyperebene mehr als eine Ecke von  $P$  enthält. (Dass es solche Normalvektoren gibt, kann man sich auf Grund von Hilfssatz 3.126 leicht überlegen: Sei  $D$  die Vereinigung aller (endlich vielen) Hyperebenen durch  $o$ , welche senkrecht zu der Verbindungsstrecke von irgendwelchen zwei Ecken von  $P$  stehen.  $D$  ist sicher nicht der ganze Raum  $\mathbb{R}^d$ , also gibt es ein  $a \in \mathbb{R}^d \setminus D$ . Keine Hyperebene mit Normalvektor  $a$  kann dann zwei (oder mehr) Ecken von  $P$  enthalten.)

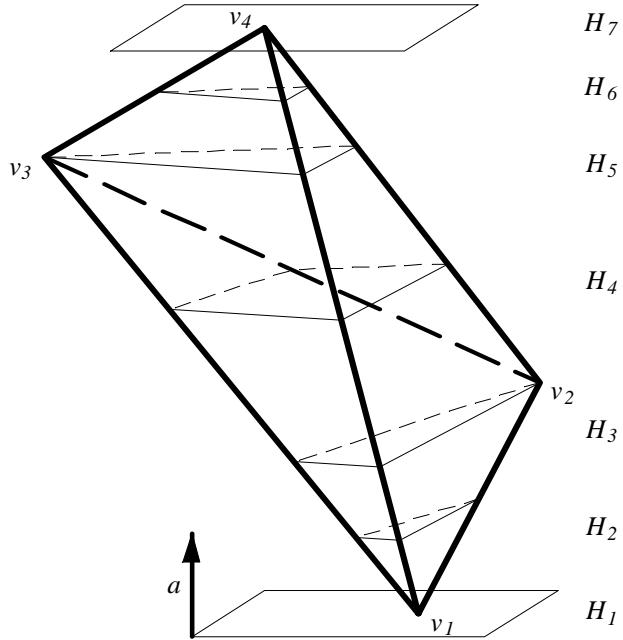
Wir legen nun durch jede Ecke von  $P$  eine Hyperebene mit Normalvektor  $a$ , und außerdem zwischen je zwei aufeinanderfolgende solche Hyperebenen eine weitere. Formal heißt das folgendes:

Seien  $v_1, \dots, v_n$  die Ecken von  $P$  und  $\beta_{2i-1} := a \cdot v_i$ . Wegen der Annahme bezüglich  $a$  gilt niemals  $\beta_{2i-1} = \beta_{2i'-1}$  für  $i \neq i'$ . Wir können daher die Nummerierung so wählen, dass

$$\beta_1 < \beta_3 < \dots < \beta_{2n-1}.$$

$\beta_{2i}$  wählen wir nun so, dass  $\beta_{2i-1} < \beta_{2i} < \beta_{2i+1}$  für alle  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , und wir setzen

$$H_j := \{x : a \cdot x = \beta_j\} \text{ für } j \in \{1, \dots, 2n-1\}.$$



Für jede Seite  $F$  von  $P$  definieren wir nun folgende "Zählfunktion":

$$\psi_j(F) := \begin{cases} 0 & \text{falls } F \subset \overline{H_j^+} \text{ oder } F \subset \overline{H_j^-}, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wenn  $\psi_j(F) = 1$ , so sagen wir, dass  $H_j$  die Seite  $F$  *echt schneidet*.

Betrachten wir nun eine Seite  $F$  der Dimension  $\geq 1$ . Dort werden das Minimum und das Maximum der Linearform  $x \mapsto a \cdot x$  nach Satz 3.130 und der Wahl von  $a$  in zwei verschiedenen Ecken von  $F$  angenommen, sagen wir in  $v_l$  und  $v_m$  mit  $l < m$ . Alle Hyperebenen, welche zwischen den durch diese beiden Ecken gehenden Hyperebenen liegen, schneiden  $F$  echt, und das heißt

$$\psi_j(F) = 1 \Leftrightarrow 2l - 1 < j < 2m - 1.$$

Die Anzahl der geraden Indizes  $j$  mit  $\psi_j(F) = 1$  ist also um eins größer als die Anzahl der ungeraden solchen Indizes. Daraus folgt

$$\sum_{j=2}^{2n-2} (-1)^j \psi_j(F) = 1 \quad \text{für } \dim F \geq 1.$$

Sei  $\mathfrak{F}_k$  die Menge aller  $k$ -Seiten von  $P$ . Dann gilt also offensichtlich für alle  $k \geq 1$ :

$$\sum_{F \in \mathfrak{F}_k} \sum_{j=2}^{2n-2} (-1)^j \psi_j(F) = f_k.$$

Bilden wir nun die alternierende Summe der  $f_k$ , so erhalten wir nach Vertauschung der Summationsreihenfolge:

$$\sum_{k=1}^{d-1} (-1)^k f_k = \sum_{j=2}^{2n-2} (-1)^j \sum_{k=1}^{d-1} (-1)^k \sum_{F \in \mathfrak{F}_k} \psi_j(F). \quad (3.3)$$

Abgesehen von dem noch fehlenden Summanden für  $k = 0$  kommt es also nur darauf an, die Summe  $\sum_{F \in \mathfrak{F}_k} \psi_j(F)$  in geeigneter Weise zu berechnen. Diese Summe gibt die Anzahl der  $k$ -Seiten von  $P$  an, welche durch die Hyperebene  $H_j$  echt geschnitten werden.

Im Folgenden unterscheiden wir nun zwei Fälle:

1. Fall:  $k \geq 2$  oder  $k = 1$  und  $j$  ist gerade.

In diesem Fall kann man sich überlegen, dass die durch  $H_j$  echt geschnittenen  $k$ -Seiten von  $P$  umkehrbar eindeutig den  $(k-1)$ -Seiten des Schnittpolytops  $P_j := H_j \cap P$  entsprechen. (Die etwas mühsamen Details übergehen wir hier.) Daher gilt:

$$\sum_{F \in \mathfrak{F}_k} \psi_j(F) = f_{k-1}(P_j) \quad \text{für } k \geq 2 \text{ oder } k = 1 \text{ und } j \text{ gerade.}$$

2. Fall:  $k = 1$  und  $j$  ist ungerade.

In diesem Fall enthält  $H_j$  genau eine Ecke von  $P$ . Die durch  $H_j$  echt geschnittenen Kanten von  $P$  entsprechen umkehrbar eindeutig den von dieser Ecke verschiedenen Ecken von  $H_j \cap P$ . Daher gilt:

$$\sum_{F \in \mathfrak{F}_1} \psi_j(F) = f_0(P_j) - 1 \quad \text{für } j \text{ ungerade.}$$

Setzen wir das in (3.3) ein, so erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{d-1} (-1)^k f_k = \sum_{j=2}^{2n-2} (-1)^j \sum_{k=1}^{d-1} (-1)^k f_{k-1}(P_j) - (n-2).$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt für jedes  $j$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{d-1} (-1)^k f_{k-1}(P_j) &= \sum_{k=0}^{d-2} (-1)^{k+1} f_k(P_j) = - \sum_{k=0}^{d-2} (-1)^k f_k(P_j) = \\ &= -1 + (-1)^{d-1}. \end{aligned}$$

Daraus folgt unter Beachtung von  $n = f_0$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{d-1} (-1)^k f_k &= \sum_{j=2}^{2n-2} (-1)^j (-1 + (-1)^{d-1}) - f_0 + 2 = \\ &= \sum_{j=2}^{2n-2} (-1)^{j+1} + \sum_{j=2}^{2n-2} (-1)^{j+d-1} - f_0 + 2 = \\ &= -1 - (-1)^d - f_0 + 2, \end{aligned}$$

also

$$\sum_{k=0}^{d-1} (-1)^k f_k = 1 - (-1)^d.$$

□

Der Euler'sche Polyedersatz besagt also, dass die  $f$ -Vektoren der  $d$ -Polytope auf einer bestimmten Hyperebene des  $\mathbb{R}^d$  bzw.  $\mathbb{R}^{d+1}$  liegen. Man kann sogar zeigen, dass es keinen kleineren affinen Teilraum gibt, auf dem sie liegen (siehe z.B. [2]). Für simpliziale Polytope erfüllen die  $f$ -Vektoren jedoch noch weitere lineare Gleichungen. So sieht man z.B. ganz leicht, dass für simpliziale 3-Polytope (also Dreieckspolyeder) gilt:  $3f_2 = 2f_1$ . Das ist die Aussage des folgenden Satzes für  $d = 3$  und  $k = 1$ .

**Satz 3.156** (Dehn-Sommerville-Gleichungen für simpliziale Polytope) *Sei  $(f_0, \dots, f_{d-1})$  der  $f$ -Vektor eines simplizialen  $d$ -Polytops. Dann gilt für  $0 \leq k \leq d-1$ :*

$$\sum_{j=k}^{d-1} (-1)^{d-1-j} \binom{j+1}{k+1} f_j = f_k.$$

*Beweis:* Siehe z.B. [2]. □

Diese Gleichungen wurden 1905 von *Max Dehn* entdeckt und für  $d \leq 5$  bewiesen. Von *D. M. Y. Sommerville* (1927) stammt der erste Beweis für beliebige Dimensionen. *Victor Klee* entdeckte die Gleichungen 1963 wieder und bewies sie in allgemeinerem Rahmen.

(*Max Dehn* (1878 - 1952) war ein Schüler von Hilbert und löste eines der berühmten 23 Probleme, die Hilbert im Jahre 1900 gestellt hatte. Er befasste sich mit geometrischen Problemen, mit Topologie und Darstellungen von Gruppen. *Duncan McLaren Young Sommerville* (1879 - 1934) interessierte sich insbesondere für nicht-euklidische und kombinatorische Geometrie.)

Es ist zu beachten, dass die Zahl  $f_k$  auf beiden Seiten der Gleichung auftritt und daher weggekürzt werden kann, falls  $d - 1 - k$  gerade ist. Dagegen ergibt sich

$$\sum_{j=k+1}^{d-1} (-1)^{d-1-j} \binom{j+1}{k+1} f_j = 2f_k \quad \text{für } d - 1 - k \text{ ungerade und } k \leq d - 2.$$

Auf Grund dieser Gleichungen kann man sukzessive alle  $f_k$  mit  $d - 1 - k$  ungerade und  $k \leq d - 2$  ausrechnen, wenn die anderen Seitenanzahlen gegeben sind. Sehen wir uns z.B. den Fall  $d = 5$  an: Mit  $k = 3$  erhalten wir  $2f_3 = \sum_{j=4}^4 (-1)^{4-j} \binom{j+1}{4} f_j = 5f_4$ , und daraus ergibt sich:

$$2f_1 = \sum_{j=2}^4 (-1)^{4-j} \binom{j+1}{2} f_j = 3f_2 - 6f_3 + 10f_4 = 3f_2 - 15f_4 + 10f_4 = 3f_2 - 5f_4.$$

Man kann sich überlegen, dass bei gegebener Dimension  $d$  nur etwa die Hälfte der Dehn-Sommerville-Gleichungen unabhängig voneinander sind. Genauer gilt: Die Dehn-Sommerville-Gleichungen bilden zusammen mit dem Euler'schen Polyedersatz ein lineares Gleichungssystem, dessen Matrix den Rang  $\lceil d/2 \rceil$  hat. Die Dimension des dadurch bestimmten affinen Teilraums ist also gleich  $d - \lceil d/2 \rceil = \lfloor d/2 \rfloor$ .

Auf Grund der Dualität zwischen simplizialen und simplen Polytopen (Satz 3.153) gilt folgender Satz:

**Satz 3.157** (Dehn-Sommerville-Gleichungen für simple Polytope) *Sei  $(f_0, \dots, f_{d-1})$  der  $f$ -Vektor eines simplen  $d$ -Polytops. Dann gilt für  $0 \leq k \leq d - 1$ :*

$$\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{d-j}{d-k} f_j = f_k.$$

*Beweis:*

Sei  $(f_0^*, \dots, f_{d-1}^*)$  der  $f$ -Vektor des polaren Polytops. Dann gilt auf Grund der Sätze 3.146 und 3.144  $f_j^* = f_{d-j-1}$ . Da das polare Polytop simplizial ist, folgt

$$\sum_{j=k}^{d-1} (-1)^{d-1-j} \binom{j+1}{k+1} f_{d-1-j} = f_{d-1-k}.$$

Ersetzen wir hier  $j$  durch  $d - 1 - j$  und  $k$  durch  $d - 1 - k$ , so ergibt sich die Behauptung.  $\square$

### 3.4.9 Die zyklischen Polytope und das Upper Bound Theorem

Es geht hier um spezielle Polytope, die besonders interessante kombinatorische Eigenschaften besitzen.

**Definition 3.158** Unter einem **zyklischen  $d$ -Polytop** versteht man die konvexe Hülle von mehr als  $d$  Punkten auf der sogenannten Momentenkurve

$$c_d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d : t \mapsto (t, t^2, \dots, t^d).$$

**Lemma 3.159** Jede Hyperebene des  $\mathbb{R}^d$  enthält höchstens  $d$  Punkte der Momentenkurve.

*Beweis:*

Sei  $H$  eine Hyperebene mit Gleichung  $a_1x_1 + \dots + a_dx_d = \beta$ . Ein Punkt  $c_d(t)$  der Momentenkurve liegt genau dann auf  $H$ , wenn  $a_1t + \dots + a_dt^d = \beta$ , d.h. wenn  $t$  eine Wurzel der entsprechenden Gleichung  $d$ -ten Grades ist. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra gibt es aber höchstens  $d$  solche Wurzeln.  $\square$

**Folgerung 3.160** Je  $d + 1$  oder weniger Punkte der Momentenkurve sind affin unabhängig.

*Beweis:* Da jede Teilmenge einer affin unabhängigen Punktmenge wieder affin unabhängig ist, genügt es,  $d + 1$  Punkte zu betrachten. In diesem Fall bedeutet die affine Unabhängigkeit aber, dass die Punkte nicht auf einer Hyperebene liegen, und das ist gerade die Aussage des Lemmas.  $\square$

Insbesondere folgt, dass jedes zyklische  $d$ -Polytop wirklich die Dimension  $d$  hat, dass also die Bezeichnung "d-Polytop" gerechtfertigt ist.

**Satz 3.161** Jedes zyklische  $d$ -Polytop ist simplizial.

*Beweis:*

Sei  $C$  die konvexe Hülle der Punkte  $c_d(t_1), \dots, c_d(t_n)$  mit  $t_1 < \dots < t_n$  und  $n \geq d + 1$ .

Da jede Ecke von  $C$  von der Form  $c_d(t_i)$  ist, genügt es, zu zeigen, dass keine Facette von  $C$  mehr als  $d$  Punkte  $c_d(t_i)$  enthält. Das folgt aber unmittelbar aus dem Lemma.  $\square$

**Satz 3.162** Sei  $C_{n,d}$  die konvexe Hülle der Punkte  $v_1 := c_d(t_1), \dots, v_n := c_d(t_n)$  mit  $t_1 < \dots < t_n$  und  $n \geq d+1$ . Für  $k \leq d/2$  bilden je  $k$  Punkte aus  $\{v_1, \dots, v_n\}$  die Ecken einer  $(k-1)$ -Seite von  $C_{n,d}$ . Insbesondere sind also die  $v_i$  genau die Ecken von  $C_{n,d}$ .

*Beweis:*

Wir betrachten  $k$  Punkte  $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$  mit  $i_1 < \dots < i_k$  und konstruieren dazu eine Stützhyperebene von  $C := C_{n,d}$  mit Hilfe des folgenderweise definierten Polynoms  $p$ :

$$p(t) := \prod_{j=1}^k (t - t_{i_j})^2.$$

$p$  ist ein Polynom vom Grade  $2k \leq d$  mit  $p(t) \geq 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Es gibt  $a_0, \dots, a_{2k} \in \mathbb{R}$ , sodass

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{2k} t^{2k}.$$

Sei nun  $a := (a_1, \dots, a_{2k}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d$  und  $H := \{x \in \mathbb{R}^d : a \cdot x = -a_0\}$ .

Wir sehen:

$$\begin{aligned} p(t_{i_j}) &= a_0 + a \cdot v_{i_j} = 0, \text{ d.h. } v_{i_j} \in H \text{ für } j \in \{1, \dots, k\}, \\ p(t_i) &= a_0 + a \cdot v_i > 0, \text{ d.h. } v_i \in H^+ \text{ für } i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}. \end{aligned}$$

$H$  ist also eine Stützhyperebene von  $C$  und enthält von den Punkten  $v_i$  genau diejenigen mit  $i \in \{i_1, \dots, i_k\}$ .  $F := H \cap C$  ist somit eine Seite von  $C$ . Daraus folgt  $F = \text{conv} \{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$  (siehe Satz 3.117). Da die Punkte  $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$  nach Folgerung 3.160 affin unabhängig sind, ist  $\dim F = k-1$ . Für  $k=1$  folgt daraus, dass alle  $v_i$  Ecken von  $C$  sind.  $\square$

**Bemerkung 3.163** Für alle  $k \leq d/2-1$  und alle  $n \geq d+1$  gilt

$$f_k(C_{n,d}) = \binom{n}{k+1}.$$

**Folgerung 3.164** Für  $d \geq 4$  sind je zwei Ecken von  $C_{n,d}$  durch eine Kante verbunden.

*Bemerkung:* Die einzigen 3-Polytope, bei denen je zwei Ecken durch eine Kante verbunden sind, sind die 3-Simplizes. Das kann man leicht mit dem Euler'schen Polyedersatz beweisen (Übungsaufgabe).

Die zyklischen Polytope sind vor allem auf Grund des folgenden, ziemlich tief liegenden Satzes bekannt, auf dessen Beweis (siehe z.B. [2]) wir hier nicht näher eingehen können.

**Satz 3.165** (Upper Bound Theorem für konvexe Polytope, Peter McMullen 1970) *Die zyklischen  $d$ -Polytope haben unter allen  $d$ -Polytopen mit gegebener Eckenanzahl für jedes  $k \in \{1, \dots, d-1\}$  die größtmögliche Anzahl von  $k$ -dimensionalen Seiten.*

Für jedes  $d$ -Polytop  $P$  mit  $n$  Ecken gilt also:

$$f_k(P) \leq f_k(C_{n,d})$$

für alle  $k \in \{0, \dots, d-1\}$ . Interessant ist das natürlich vor allem für  $k > d/2-1$ , und da auch nur für  $d \geq 4$ , denn für  $d = 3$  folgt ja aus dem Euler'schen Polyedersatz  $n - f_1 + f_2 = 2$  und der einfachen Ungleichung  $3f_2 \leq 2f_1$  sofort

$$\begin{aligned} f_1 &\leq 3n - 6, \\ f_2 &\leq 2n - 4, \end{aligned}$$

und das ist die Aussage des Upper Bound Theorems für  $d = 3$  und  $k = 1$  bzw. 2. (Übungsaufgabe.)

Die Richtigkeit dieses Satzes war bereits 1957 von *Theodore Samuel Motzkin* (1908-1970) behauptet worden. Es konnten aber zunächst nur verschiedene Spezialfälle bewiesen werden.

Das Upper Bound Theorem ist insbesondere auch für die lineare Optimierung von Bedeutung. Auf Grund der Sätze im Abschnitt "Polarität von konvexen Polytopen" (3.4.7) folgt ja für jedes  $d$ -Polytop  $P$  mit  $n$  Facetten:

$$f_0(P) = f_{d-1}(P^*) \leq f_{d-1}(C_{n,d}).$$

Die Zahlen  $f_k(C_{n,d})$  kann man explizit angeben. Da die entsprechenden Formeln aber relativ kompliziert sind, begnügen wir uns hier mit dem wichtigen Spezialfall  $k = d-1$ . Es gilt:

$$f_{d-1}(C_{n,d}) = \binom{n - d_1 - 1}{d_2} + \binom{n - d_2 - 1}{d_1},$$

wobei zur Abkürzung  $d_1 := \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$  und  $d_2 := \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$  gesetzt wurde. (Bezüglich dieser Formel und der anderen hier nicht bewiesenen Sätze über konvexe Polytope sei nochmals auf das Buch [2] verwiesen.)

Für die Abschätzung der Rechenzeit bei linearen Optimierungsaufgaben ist vor allem die Größenordnung von  $f_{d-1}(C_{n,d})$  von Bedeutung. Aus der obigen Formel folgt für  $n \geq 4$  (Übungsaufgabe):

$$c_d n^{\lfloor d/2 \rfloor} \leq f_{d-1}(C_{n,d}) \leq 2 n^{\lfloor d/2 \rfloor}$$

mit einer von  $d$  abhängigen Konstanten  $c_d > 0$ . (Für  $n \geq 2d$  kann man z.B.  $c_d = \frac{1}{d^{\lfloor d/2 \rfloor}}$  nehmen.)

Das heißt insbesondere, dass bei einer linearen Optimierungsaufgabe mit  $d$  Unbekannten die Anzahl der Ecken des entsprechenden Polytops mit der Potenz  $\lfloor d/2 \rfloor$  der Anzahl  $n$  der Ungleichungen anwachsen kann. Obwohl der üblicherweise angewendete Simplexalgorithmus von Dantzig normalerweise wesentlich weniger Rechenschritte benötigt, gibt es Beispiele, wo seine Rechenzeitkomplexität in der angegebenen Größenordnung liegt. Interessanterweise wurden inzwischen Verfahren gefunden, bei denen die Anzahl der Rechenschritte für festes  $d$  von der Ordnung  $O(n \log n)$  ist [8]. Hier sind besonders der Algorithmus von *Narendra Karmarkar* (1984) und seine Modifikationen zu nennen (siehe z.B. [12]).

Die zyklischen Polytope spielen auch bei anderen Abschätzungen in der kombinatorischen Geometrie eine wesentliche Rolle, so z.B. in der folgenden für  $d \geq 3$  bisher unbewiesenen Vermutung [5] (vgl. Bemerkung Seite 58).

**Vermutung 3.166** *Für jede endliche Teilmenge  $X$  des  $\mathbb{R}^d$  sei  $g_k(X)$  die Anzahl der Semiräume von  $X$ , welche höchstens  $k$  Punkte enthalten. Dann gilt vermutlich*

$$g_k(X) \leq g_k(\text{vert } C_{n,d}) \text{ für } |X| \leq n.$$

## 3.5 Quadriken

### 3.5.1 Einleitung

Hyperebenen des  $\mathbb{R}^d$  sind Teilmengen des  $\mathbb{R}^d$ , die sich durch eine *lineare Gleichung* der Form  $a_1x_1 + \dots + a_dx_d = \beta$  mit  $(a_1, \dots, a_d) \neq 0$  beschreiben lassen. Es ist naheliegend, in analoger Weise Lösungsmengen von quadratischen Gleichungen oder Gleichungen höheren Grades zu betrachten. Wir beschränken uns hier auf quadratische Gleichungen, da man diese mit Mitteln der linearen Algebra behandeln kann. Gleichungen höheren Grades sind Gegenstand der algebraischen Geometrie.

Eine quadratische Gleichung in  $d$  Variablen  $x_1, \dots, x_d$  sieht ausführlich ge-

schrieben so aus:

$$\begin{aligned} & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1d}x_1x_d + \\ & + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{2d}x_2x_d + \\ & + \dots + \\ & + a_{d1}x_dx_1 + a_{d2}x_dx_2 + \dots + a_{dd}x_d^2 + \\ & + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_dx_d + c = 0. \end{aligned}$$

Kürzer und wohl auch übersichtlicher ist folgende Schreibweise:

$$\sum_{i,k=1}^d a_{ik}x_i x_k + \sum_{i=1}^d b_i x_i + c = 0.$$

Die Lösungsmenge einer solchen Gleichung nennt man *Quadrik*.

So eine quadratische Gleichung besteht also aus einem quadratischen Anteil (mit den Koeffizienten  $a_{ik} \in \mathbb{R}$ ), einem linearen Anteil (mit den Koeffizienten  $b_i \in \mathbb{R}$ ) und einer Konstanten  $c \in \mathbb{R}$ . Der lineare Anteil stellt eine Linearform dar, und entsprechend nennt man den quadratischen Anteil eine *quadratische Form*. Diese ist durch die Matrix  $A = (a_{ik})$  der Koeffizienten bestimmt. Da  $x_i x_k = x_k x_i$ , kann man für  $i \neq k$  jeweils zwei Summanden zusammenfassen. Mit  $\tilde{a}_{ik} := \frac{1}{2}(a_{ik} + a_{ki})$  gilt

$$\sum_{i,k=1}^d a_{ik}x_i x_k = \sum_{i=1}^d \tilde{a}_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < k \leq d} \tilde{a}_{ik}x_i x_k = \sum_{i,k=1}^d \tilde{a}_{ik}x_i x_k.$$

Auf diese Weise sieht man, dass man jede quadratische Form durch eine symmetrische Matrix beschreiben kann. (Es gilt ja  $\tilde{a}_{ik} = \tilde{a}_{ki}$ .)

*Beispiel:* Sei  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ . Dann lautet die zugehörige quadratische Form

$$2x_1^2 + 3x_1x_2 + 5x_2x_1 + 6x_2^2 = 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 6x_2^2 = 2x_1^2 + 2 \cdot (4x_1x_2) + 6x_2^2.$$

Die entsprechende symmetrische Matrix ist also  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ .

Wichtige Beispiele für Quadriken sind im  $\mathbb{R}^2$  die Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln, im  $\mathbb{R}^3$  Zylinder, Kegel, Kugeln und eine Reihe anderer Flächen. Diese werden später ausführlich besprochen.

### 3.5.2 Quadratische Formen

#### Definition

Wir wollen nun quadratische Formen koordinatenfrei definieren, so wie man das üblicherweise auch mit den Linearformen bzw. linearen Abbildungen macht. Dazu erinnern wir uns zunächst an den folgenden Begriff:

**Definition 3.167** *Sei  $V$  ein Vektorraum über dem Körper  $K$ . Eine Abbildung  $F : V \times V \rightarrow K$  heißt **Bilinearform** (auf  $V$ ) wenn für alle  $x_0, y_0 \in V$  die beiden Abbildungen*

$$\begin{aligned} V \rightarrow K : x \mapsto F(x, y_0), \\ V \rightarrow K : y \mapsto F(x_0, y) \end{aligned}$$

*linear sind.*

Bei gegebener Basis von  $V$  lässt sich jede Bilinearform  $F$  in eindeutiger Weise durch eine Matrix beschreiben: Sei  $B = (v_1, \dots, v_d)$  eine (geordnete) Basis von  $V$ . Dann gilt mit  $x = \sum x_i v_i$  und  $y = \sum y_i v_i$  auf Grund der Bilinearität von  $F$ :

$$F(x, y) = F(\sum_i x_i v_i, \sum_k y_k v_k) = \sum_i x_i F(v_i, \sum_k y_k v_k) = \sum_{i,k} x_i y_k F(v_i, v_k).$$

Setzen wir  $a_{ik} := F(v_i, v_k)$ , so gilt also

$$F(x, y) = \sum_{i,k=1}^d a_{ik} x_i y_k.$$

Bezeichnen wir den Koordinatenvektor von  $x$  bezüglich  $B$  mit  $x_B$ , also  $x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$ , und analog  $y_B$ , so heißt das

$$F(x, y) = x_B^T A y_B$$

mit der Matrix  $A = (a_{ik})$ .

Besonders wichtig ist der Fall, dass es sich um die kanonische Basis im  $\mathbb{R}^d$  handelt, also  $v_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$ ,  $v_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ , usw.. In diesem Fall

können wir  $x$  mit dem Spaltenvektor  $x_B$  identifizieren, und analog  $y$  mit  $y_B$ . Dann gilt:

$$F(x, y) = x^T A y.$$

Umgekehrt sehen wir sofort, dass jede Abbildung  $V \times V \rightarrow K$  der Form  $(x, y) \mapsto x^T A y$  eine Bilinearform ist. (Das folgt aus den bekannten Rechenregeln für die Matrizenmultiplikation.)

*Beispiel:*

Sei wieder  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$  und  $F$  die entsprechende Bilinearform auf  $\mathbb{R}^2$  bezüglich der kanonischen Basis, also

$$\begin{aligned} F(x, y) &= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (2x_1 + 5x_2)y_1 + (3x_1 + 6x_2)y_2 = \\ &= 2x_1y_1 + 3x_1y_2 + 5x_2y_1 + 6x_2y_2. \end{aligned}$$

**Definition 3.168** Sei  $V$  ein Vektorraum über  $K$ . Eine Abbildung  $G : V \rightarrow K$  heißt **quadratische Form** (auf  $V$ ), wenn es eine Bilinearform  $F$  auf  $V$  gibt, sodass für alle  $x \in V$

$$G(x) = F(x, x).$$

Die folgende Bemerkung macht die Bezeichnung "quadratische Form" verständlich:

**Bemerkung 3.169** Sei  $G$  eine quadratische Form auf dem Vektorraum  $V$  über  $K$ . Dann gilt für alle  $\lambda \in K$  und alle  $x \in V$ :

$$G(\lambda x) = \lambda^2 G(x).$$

*Beweis:*  $G(\lambda x) = F(\lambda x, \lambda x) = \lambda F(x, \lambda x) = \lambda^2 F(x, x) = \lambda^2 G(x)$  (wegen der Linearität von  $F$  in beiden Variablen).  $\square$

*Beispiel für eine quadratische Form:* Für  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  sei  $G(x) = x_1^2 + x_1x_2$ . Dann gilt offensichtlich  $G(x) = F(x, x)$  mit  $F(x, y) := x_1y_1 + x_1y_2$ . Diese Bilinearform ist aber nicht eindeutig bestimmt. Z.B. gilt ebenso gut  $G(x) = F'(x, y)$  mit  $F'(x, y) := x_1y_1 + x_2y_1$ . Auf Grund des nächsten Satzes können wir aber Eindeutigkeit erreichen, indem wir verlangen, dass  $F$  symmetrisch ist:

**Definition 3.170** Eine Bilinearform  $F : V \times V \rightarrow K$  heißt **symmetrisch**, wenn  $F(x, y) = F(y, x)$  für alle  $x, y \in V$ .

**Satz 3.171** Sei  $V$  ein Vektorraum über einem Körper  $K$  mit  $1 + 1 \neq 0$ . Dann gibt es zu jeder quadratischen Form  $G$  auf  $V$  eine eindeutig bestimmte symmetrische Bilinearform  $F$ , sodass  $G(x) = F(x, x)$  für alle  $x \in V$ .

*Beweis:* Sei zunächst  $G(x) = F(x, x)$  (für alle  $x \in V$ ) mit irgendeiner Bilinearform  $F$ . Setzen wir

$$\tilde{F}(x, y) := \frac{1}{2}(F(x, y) + F(y, x)),$$

so sehen wir:  $\tilde{F}$  ist eine symmetrische Bilinearform, und es gilt  $\tilde{F}(x, x) = F(x, x) = G(x)$ . (In einem beliebigen Körper wird das Symbol 2 so definiert:  $2 := 1+1$ .) Die Eindeutigkeit von  $\tilde{F}$  ergibt sich aus der folgenden Bemerkung:

**Bemerkung 3.172** Sei  $V$  ein Vektorraum über einem Körper  $K$  mit  $1 + 1 \neq 0$ .  $F$  sei eine symmetrische Bilinearform auf  $V$ , und  $G(x) := F(x, x)$  für alle  $x \in V$ . Dann gilt

$$F(x, y) = \frac{1}{2}(G(x + y) - G(x) - G(y)).$$

Man kann die Funktionswerte der Bilinearform also ganz einfach berechnen, wenn man die zugehörige quadratische Form kennt.

*Beweis:*  $G(x + y) = F(x + y, x + y) = F(x, x + y) + F(y, x + y) = F(x, x) + F(x, y) + F(y, x) + F(y, y)$ .

Wegen der Symmetrie von  $F$  gilt also  $G(x + y) = G(x) + G(y) + 2F(x, y)$ , und daraus folgt sofort die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung 3.173** Sei  $F$  eine Bilinearform auf  $V$  mit Matrix  $A$  bezüglich einer gegebenen Basis  $(v_1, \dots, v_d)$ . Dann gilt für die Matrix  $\tilde{A}$  der zugehörigen symmetrischen Bilinearform  $\tilde{F}$ :

$$\tilde{A} = \frac{1}{2}(A + A^T)$$

bzw. für die entsprechenden Matrixelemente:

$$\tilde{a}_{ik} = \frac{1}{2}(a_{ik} + a_{ki}).$$

(Vgl. Bemerkung am Ende der Einleitung 3.5.1.)

*Beweis:*  $\tilde{a}_{ik} = \tilde{F}(v_i, v_k) = \frac{1}{2}(F(v_i, v_k) + F(v_k, v_i)) = \frac{1}{2}(a_{ik} + a_{ki})$ .  $\square$

**Bemerkung 3.174** Zu jeder quadratischen Form  $G$  auf  $V$  gibt es also bei gegebener Basis  $B$  eine eindeutig bestimmte symmetrische Matrix  $A$ , sodass

$$G(x) = x_B^T A x_B$$

für alle  $x \in V$ . Diese Matrix heißt **die Matrix von  $G$  bezüglich der Basis  $B$** .

Bei Benützung der kanonischen Basis im  $\mathbb{R}^d$  heißt das

$$G(x) = x^T A x = \sum_{i=1}^d a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < k \leq d} a_{ik} x_i x_k$$

mit einer eindeutig bestimmten symmetrischen Matrix  $A$ .

*Beispiel:* Sei  $G(x) = x_1^2 + 6x_1x_2 - x_2^2$ , also  $G(x) = F(x, x)$  mit

$$F(x, y) = x_1y_1 + 6x_1y_2 - x_2y_2 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Wir sehen:

$$G(x) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 - x_2^2 + 2 \cdot (3x_1x_2).$$

## Koordinatentransformation

Es ist nicht schwer zu sehen, wie sich die Matrix einer quadratischen Form ändert, wenn man zu einer anderen Basis übergeht: Sei  $A$  die (symmetrische) Matrix einer quadratischen Form  $G$  bezüglich einer Basis  $B = (v_1, \dots, v_d)$  des Vektorraums  $V$ . Wenn  $B' = (v'_1, \dots, v'_d)$  eine andere Basis von  $V$  ist, dann gibt es eine reguläre Matrix  $R$ , sodass  $x_B = Rx_{B'}$ , wenn  $x_B$  bzw.  $x_{B'}$  der Koordinatenvektor eines beliebigen Punktes  $x$  bezüglich  $B$  bzw.  $B'$  ist. Es folgt:

$$G(x) = x_B^T A x_B = (Rx_{B'})^T A (Rx_{B'}) = x_{B'}^T R^T A R x_{B'} = x_{B'}^T A' x_{B'}$$

mit

$$A' = R^T A R.$$

Im Folgenden werden wir sehen, dass es zu jeder quadratischen Form  $G$  eine Koordinatentransformation gibt, sodass die Matrix von  $G$  eine besonders einfache Gestalt bekommt, und dass es relativ leicht ist, eine solche Transformation zu finden.

**Satz 3.175** *Sei  $G$  eine quadratische Form auf einem Vektorraum  $V$  über  $K$ . Dann gibt es eine Basis von  $V$ , sodass die diesbezügliche Matrix von  $G$  Diagonalgestalt hat.*

*Beweis:* Sei  $A = (a_{ik})$  die (symmetrische) Matrix von  $G$  bezüglich irgendeiner Basis  $B$  von  $V$ . Die Behauptung ist dazu äquivalent, dass es eine reguläre Matrix  $R$  gibt, sodass  $R^T A R$  eine Diagonalmatrix ist.

Sei  $d = \dim V$ , also  $A$  eine  $d \times d$ -Matrix.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall: Es gibt einen Index  $i$ , sodass  $a_{ii} \neq 0$  ist.

Wir können o.B.d.A. annehmen, dass  $i = 1$  ist. (Sonst ändern wir die Nummerierung der Basisvektoren entsprechend. Das ist natürlich auch eine Koordinatentransformation.)

Bezeichnen wir mit  $x_1, \dots, x_d$  die Koordinaten von  $x$  bezüglich der Basis  $B$ , so gilt  $G(x) = \sum_{i,k=1}^d a_{ik}x_i x_k$  für alle  $x \in V$ .

Betrachten wir nun die Summe der Glieder, welche  $x_1$  enthalten:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1d}x_1x_d &= \\ = a_{11} \left( x_1^2 + 2x_1 \frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + \dots + a_{1d}x_d) \right) &= \\ = a_{11} \left( x_1 + \frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + \dots + a_{1d}x_d) \right)^2 - \frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + \dots + a_{1d}x_d)^2. \end{aligned}$$

Der hier angewendete Trick heißt *quadratische Ergänzung*. Dadurch wird es jetzt ganz leicht, eine Koordinatentransformation zu finden, sodass die  $x_1$  enthaltenden "gemischten" Glieder  $a_{1k}x_1x_k$  (mit  $k \geq 2$ ) verschwinden:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + \frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + \dots + a_{1d}x_d) \\ x'_2 &= x_2 \\ &\vdots \\ x'_d &= x_d \end{aligned}$$

Die entsprechende Transformationsmatrix hat folgende Gestalt:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1d}}{a_{11}} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

(Außerhalb der Diagonalen sind von der zweiten Zeile an lauter Nullen zu denken.)

$T$  ist eine reguläre Matrix, da  $\det T = 1$  ist. Es gilt also  $x' = Tx$  bzw.  $x = T^{-1}x'$ . Die Matrix  $T$  entspricht somit der Inversen der oben verwendeten Matrix  $R$ , also können wir  $R := T^{-1}$  setzen.

Wir können unsere quadratische Form also folgenderweise durch die "gestrichenen" Koordinaten ausdrücken:

$$\begin{aligned} G(x) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1d}x_1x_d + \sum_{i,k=2}^d a_{ik}x_ix_k = \\ &= a_{11}x_1'^2 - \frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2' + \dots + a_{1d}x_d')^2 + \sum_{i,k=2}^d a_{ik}x_i'x_k'. \end{aligned}$$

Durch eine analoge Transformation können wir als Nächstes die  $x_2'$  enthaltenden gemischten Glieder entfernen, falls in der Hauptdiagonalen dieser Matrix ab der 2. Zeile nicht lauter Nullen stehen, usw.. Sonst gehen wir wie beim 2. Fall vor.

2. Fall:  $a_{kk} = 0$  für alle  $k \in \{1, \dots, d\}$ .

Hier nehmen wir o.B.d.A.  $a_{12} \neq 0$  an. (Das können wir wieder durch eine geeignete Umlaufnummerierung der Basisvektoren erreichen, abgesehen vom trivialen Fall  $A = O$ .)

Betrachten wir nun folgende Koordinatentransformation:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1' + x_2' \\ x_2 &= x_1' - x_2' \\ x_3 &= x_3' \\ &\vdots \\ x_d &= x_d' \end{aligned}$$

Die entsprechende Transformationsmatrix ist

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ 1 & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

(Die nicht eingetragenen Matrixelemente außerhalb der Hauptdiagonalen sind wieder alle gleich Null.)

Auch diese Matrix ist regulär, denn  $\det R = -2$ . Mit dieser Transformation erhalten wir:

$$a_{12}x_1x_2 = a_{12}(x'_1 + x'_2)(x'_1 - x'_2) = a_{12}x'^2_1 - a_{12}x'^2_2.$$

Da sonst keine Terme auftreten, die  $x'^2_1$  enthalten, ist der Koeffizient von  $x'^2_1$  ungleich Null, und damit haben wir das Problem auf den ersten Fall zurückgeführt.  $\square$

*Beispiel:*

Sei  $G(x) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3$ . Die Matrix von  $G$  ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hier liegt also der 2. Fall vor, und obige Koordinatentransformation ergibt nach Weglassung der Striche:

$$2(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + 4(x_1 + x_2)x_3 + 6(x_1 - x_2)x_3 = 2x_1^2 - 2x_2^2 + 10x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Jetzt sieht die Matrix von  $G$  also so aus:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nun wenden wir quadratische Ergänzung an:

$$2x_1^2 + 10x_1x_3 = 2(x_1 + \frac{5}{2}x_3)^2 - \frac{25}{2}x_3^2.$$

Mit der Transformation  $x'_1 = x_1 + \frac{5}{2}x_3$  erhalten wir, wenn wir die Striche gleich wieder weglassen:

$$2x_1^2 - 2x_2^2 - \frac{25}{2}x_3^2 - 2x_2x_3.$$

Wir können nochmals quadratisch ergänzen:  $-2x_2^2 - 2x_2x_3 = -2(x_2 + \frac{1}{2}x_3)^2 + \frac{1}{2}x_3^2$ . Die Transformation  $x'_2 = x_2 + \frac{1}{2}x_3$  liefert daher (nach Weglassung der Striche)  $2x_1^2 - 2x_2^2 - 12x_3^2$ , und wir sind fertig.

In einem reellen oder komplexen Vektorraum kann man quadratische Formen noch weiter vereinfachen. Besonders einfach ist die Situation im Komplexen:

**Satz 3.176** *Sei  $G$  eine quadratische Form auf einem Vektorraum  $V$  über  $\mathbb{C}$ . Dann gibt es eine Basis von  $V$ , bezüglich welcher  $G$  eine Diagonalmatrix entspricht, bei der alle Diagonalelemente gleich 1 oder 0 sind. Die Anzahl der Einsen ist dabei eindeutig bestimmt.*

Bezüglich einer solchen Basis gilt also (eventuell nach geeigneter Umnummerierung der Basiselemente)

$$G(x) = x_1^2 + \dots + x_r^2,$$

mit einer bestimmten Zahl  $r \in \{0, 1, \dots, d\}$ , wenn wir wieder  $d := \dim V$  setzen. Diese Darstellung von  $G(x)$  als Summe von Quadraten nennt man die **komplexe Normalform** von  $G$ .

Der Fall  $r = 0$  bedeutet natürlich, dass  $G$  die Nullform ist, d.h.  $G(x) = 0$  für alle  $x \in V$ .

*Beweis:*

Auf Grund des vorigen Satzes können wir annehmen, dass die Matrix der betrachteten quadratischen Form bereits Diagonalgestalt hat. Wir wählen die Nummerierung der Basiselemente so, dass in der Diagonalen zuerst die Elemente  $\neq 0$  stehen. Dann gibt es also ein  $r \leq d$ , sodass  $a_{ii} \neq 0$  für  $1 \leq i \leq r$  und  $a_{ii} = 0$  für  $r + 1 \leq i \leq d$ , somit:

$$G(x) = a_{11}x_1^2 + \dots + a_{rr}x_r^2.$$

Da wir im Komplexen aus jeder Zahl die Quadratwurzel ziehen können, wenden wir einfach folgende Transformation an:

$$\begin{aligned} x'_i &= \sqrt{a_{ii}}x_i & \text{für } 1 \leq i \leq r, \\ x'_i &= x_i & \text{für } r + 1 \leq i \leq d. \end{aligned}$$

Die Matrix dieser Transformation lautet

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{a_{11}} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sqrt{a_{rr}} & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Sie ist offensichtlich regulär, und wir erhalten damit die gewünschte Form.

Die Zahl  $r$  ist eindeutig bestimmt, denn sie ist gleich dem Rang der Matrix, und dieser ändert sich nicht bei Koordinatentransformation. Es gilt ja allgemein:

$$\text{rank}(SAT) = \text{rank } A$$

wenn  $S$  und  $T$  reguläre Matrizen sind, die mit  $A$  in der angegebenen Weise multipliziert werden können.  $\square$

Der nächste Satz beschreibt die Situation in reellen Vektorräumen.

**Satz 3.177** *Sei  $G$  eine quadratische Form auf einem Vektorraum  $V$  über  $\mathbb{R}$ . Dann gibt es eine Basis von  $V$ , bezüglich welcher  $G$  eine Diagonalmatrix entspricht, bei der alle Diagonalelemente gleich  $+1$ ,  $-1$  oder  $0$  sind. Die Anzahl der  $+1$  ist dabei ebenso wie die Anzahl der  $-1$  eindeutig bestimmt.*

Bezüglich einer solchen Basis gilt also (eventuell nach geeigneter Umnummerierung der Basiselemente)

$$G(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2,$$

mit eindeutig bestimmten Zahlen  $p$  und  $r \in \{0, 1, \dots, d\}$ , wobei natürlich  $p \leq r$  ist. Die Zahl  $r$  ist wieder der Rang der Matrix von  $G$ . Die Darstellung von  $G(x)$  als Summe von positiven und negativen Quadraten nennt man **(reelle) Normalform** von  $G$ .

**Bemerkung 3.178** *Auf Grund dieses Satzes ist die Anzahl der positiven Quadrate in der reellen Normalform unabhängig von der gewählten Transformation. Diese Aussage nennt man "Trägheitssatz von Sylvester".*

(James Joseph Sylvester lebte 1814 - 1897, hauptsächlich in England. Von ihm stammen wesentliche Beiträge zur Matrizentheorie, insbesondere auch die Bezeichnung "Matrix". Der "Trägheitssatz von Sylvester" wurde jedoch vermutlich das erste Mal von Carl Gustav Jacob Jacobi (1804 - 1851) bewiesen.)

*Beweis von Satz 3.177:*

Sei  $p$  die Anzahl der positiven Diagonalelemente in der Diagonalmatrix gemäß Satz 3.175 und  $r$  der Rang dieser Matrix (das ist die Anzahl der von Null verschiedenen Diagonalelemente). Dann wählen wir die Nummerierung der Basisvektoren so, dass

$$a_{ii} \begin{cases} > 0 & \text{für } 1 \leq i \leq p, \\ < 0 & \text{für } p < i \leq r, \\ = 0 & \text{für } r < i \leq d. \end{cases}$$

Dementsprechend transformieren wir folgendermaßen:

$$x'_i = \begin{cases} \sqrt{a_{ii}} x_i & \text{für } 1 \leq i \leq p, \\ \sqrt{-a_{ii}} x_i & \text{für } p < i \leq r, \\ x_i & \text{für } r < i \leq d. \end{cases}$$

In Bezug auf die entsprechende Basis gilt also für die betrachtete quadratische Form  $G$ :

$$G(x) = x_1'^2 + \dots + x_p'^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2.$$

Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen. Um auch den zweiten Teil (den "Trägheitssatz") einzusehen, nehmen wir an, durch irgend eine andere Transformation könnte man erreichen, dass

$$G(x) = x_1''^2 + \dots + x_q''^2 - x_{q+1}''^2 - \dots - x_r''^2$$

mit einem  $q \neq p$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir natürlich annehmen, dass  $p < q$  ist. (Wenn zunächst  $p > q$  ist, vertauschen wir die Rollen von  $p$  und  $q$ .) Sei  $T = (t_{ik})$  die Matrix der Transformation von den  $x'_i$  auf die  $x''_i$ . Das heißt, für die entsprechenden Koordinatenvektoren  $x'$  und  $x''$  gilt  $x'' = Tx'$ . Dann betrachten wir folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x'_1 &= 0 \\ &\vdots \\ x'_p &= 0 \\ t_{q+1,1}x'_1 + \dots + t_{q+1,d}x'_d &= 0 \\ &\vdots \\ t_{d1}x'_1 + \dots + t_{dd}x'_d &= 0 \end{aligned}$$

Das sind  $p + (d - q)$ , also weniger als  $d$ , Gleichungen in  $d$  Unbekannten. Es gibt also eine nicht-triviale Lösung

$$\tilde{x}' = (\tilde{x}'_1, \dots, \tilde{x}'_d) \neq o.$$

Sei nun  $\tilde{x}'' := T\tilde{x}'$ , also

$$\begin{aligned} \tilde{x}''_{q+1} &= t_{q+1,1}\tilde{x}'_1 + \dots + t_{q+1,d}\tilde{x}'_d \\ &\vdots \\ \tilde{x}''_d &= t_{d1}\tilde{x}'_1 + \dots + t_{dd}\tilde{x}'_d \end{aligned}$$

$\tilde{x}'' \neq o$ , da  $T$  eine reguläre Matrix ist. Auf Grund des betrachteten Gleichungssystems ist aber  $\tilde{x}''_{q+1} = \dots = \tilde{x}''_d = 0$ . Also muss eine der Zahlen  $\tilde{x}''_1, \dots, \tilde{x}''_q$  von Null verschieden sein, und folglich

$$\tilde{x}''_1^2 + \dots + \tilde{x}''_q^2 - \tilde{x}''_{q+1}^2 - \dots - \tilde{x}''_r^2 > 0.$$

Andererseits ist  $\tilde{x}'_1 = \dots = \tilde{x}'_p = 0$ , also

$$\tilde{x}'_1^2 + \dots + \tilde{x}'_p^2 - \tilde{x}'_{p+1}^2 - \dots - \tilde{x}'_r^2 \leq 0.$$

Da die  $\tilde{x}'_i$  und  $\tilde{x}''_i$  Koordinaten ein und desselben Vektors, sagen wir  $\tilde{x}$ , sind, ist das ein Widerspruch:  $G(\tilde{x})$  kann nicht gleichzeitig  $> 0$  und  $\leq 0$  sein.  $\square$

Auf Grund dieses Satzes ist die folgende Definition sinnvoll:

**Definition 3.179** Die Anzahl  $p$  der positiven Quadrate in der Normalform einer quadratischen Form  $G$  heißt der (**Trägheits-Index**) von  $G$ . Die Differenz zwischen der Anzahl der positiven und der Anzahl der negativen Quadrate heißt die **Signatur** von  $G$ .

Die Signatur von  $G$  ist also  $p - (r - p) = 2p - r$ .

Zur Bestimmung des Index bzw. der Signatur genügt natürlich die Normalform gemäß Satz 3.175. So hat etwa die quadratische Form des letzten Beispiels Index 1 und Signatur  $-1$ .

**Definition 3.180** Eine quadratische Form  $G$  auf einem reellen Vektorraum  $V$  heißt **positiv** bzw. **negativ definit**, wenn

$$G(x) > 0 \text{ bzw. } G(x) < 0 \text{ für alle } x \neq 0.$$

$G$  heißt **positiv** bzw. **negativ semidefinit**, wenn

$$G(x) \geq 0 \text{ bzw. } G(x) \leq 0 \text{ für alle } x.$$

Wenn  $G$  weder positiv noch negativ semidefinit ist, dann heißt  $G$  **indefinit**.

Die quadratische Form des letzten Beispiels ist also indefinit.

Die folgende Bemerkung ist nun auf Grund des letzten Satzes leicht einzusehen:

**Bemerkung 3.181** Sei  $G$  eine quadratische Form auf einem  $d$ -dimensionalen reellen Vektorraum. Dann gilt:

- a)  $G$  ist genau dann positiv definit, wenn der Index von  $G$  gleich  $d$  ist.
- b)  $G$  ist genau dann positiv semidefinit, wenn der Index von  $G$  mit der Signatur von  $G$  übereinstimmt.

Der Index einer quadratischen Form wird oft mit Hilfe des folgenden Satzes bestimmt:

**Satz 3.182** *Sei  $A = (a_{ik})$  eine reelle symmetrische  $d \times d$ -Matrix, und für  $k \in \{1, \dots, d\}$  sei*

$$\mu_k := \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} \neq 0.$$

*Bezeichnen wir mit  $w$  die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge*

$$(1, \mu_1, \dots, \mu_d),$$

*so ist der Index der zu  $A$  gehörigen quadratischen Form  $G$  gleich  $d - w$ .*

**Bemerkung 3.183** *Die obigen Zahlen  $\mu_k$  heißen die **Hauptminoren** der Matrix  $A$ .*

*Beweisidee:* Man kann zeigen, dass nach einer geeigneten Koordinatentransformation die Matrix von  $G$  gleich der folgenden Diagonalmatrix ist:

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \frac{\mu_2}{\mu_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{\mu_d}{\mu_{d-1}} \end{pmatrix}.$$

Die Anzahl  $w$  der Vorzeichenwechsel in der Folge  $(1, \mu_1, \dots, \mu_d)$  ist gleich der Anzahl der negativen Diagonalelemente dieser Matrix, also gleich  $d$  minus dem Index. Folglich ist der Index gleich  $d - w$ .  $\square$

**Folgerung 3.184** *Eine quadratische Form auf einem reellen Vektorraum ist genau dann positiv definit, wenn alle Hauptminoren der zugehörigen Matrix (in Bezug auf irgendeine Basis) positiv sind.*

(Zum *Beweis* ist nur zu zeigen, dass bei der Matrix einer positiv definiten quadratischen Form alle Hauptminoren ungleich Null sind.)

### 3.5.3 Quadriken

#### Definition

Eine Quadrik ist eine Teilmenge eines affinen Raums, welche sich durch eine quadratische Gleichung beschreiben lässt. Wir behandeln hier nur den Fall eines reellen Vektorraums. Die genaue Definition lautet in diesem Fall:

**Definition 3.185** *Sei  $G$  eine quadratische Form und  $f$  eine Linearform auf einem reellen Vektorraum  $V$ , sowie  $c$  eine reelle Zahl. Dann heißt die Menge*

$$Q := \{x \in V : G(x) + f(x) + c = 0\}$$

*eine **Quadrik** in  $V$ . (Auch: **Hyperfläche 2. Ordnung**).*

Wenn  $G(x) = 0$  für alle  $x \in V$ , dann handelt es sich einfach um eine Hyper-ebene. Man setzt daher oft voraus, dass  $G$  nicht die Nullform ist.

Bezüglich einer gegebenen Basis  $B$  von  $V$  gibt es eine symmetrische Matrix  $A$  und einen (Zeilen-)Vektor  $b$ , sodass  $G(x) = x_B^T A x_B$  und  $f(x) = b x_B$  für alle  $x \in V$ , und daher

$$Q = \{x \in V : x_B^T A x_B + b x_B + c = 0\}.$$

Speziell bezüglich der kanonischen Basis im  $\mathbb{R}^d$  gilt daher:

$$Q = \{x \in V : x^T A x + b x + c = 0\}.$$

*Beispiele:*

- Sei  $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $b = (1, 5)$  und  $c = 6$ . Dann ist die zugehörige Quadrik (bezüglich der kanonischen Basis im  $\mathbb{R}^2$ ) folgende Menge:

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : 4x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 + x_1 + 5x_2 + 6 = 0\}.$$

Wir werden uns im Folgenden damit beschäftigen, wie man feststellen kann, ob das eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist (siehe Seite 123).

- Sei  $A$  die  $d \times d$ -Einheitsmatrix,  $b = o$  und  $c = -1$ . Dann handelt es sich um folgende Menge:

$$\{x \in \mathbb{R}^d : x_1^2 + \dots + x_d^2 = 1\}$$

Diese Menge heißt im Allgemeinen die *Einheitssphäre* im  $\mathbb{R}^d$ . Für  $d = 2$  sagt man *Einheitskreis*, für  $d = 3$  auch *Einheitskugel* (siehe Kapitel 4.4).

### Affine Transformation von Quadriken

Wie ändert sich die Gleichung einer Quadrik, wenn wir auf sie eine Affinität anwenden? Betrachten wir dazu eine Affinität  $\alpha$  des Vektorraumes  $V$ :

$$\alpha : V \rightarrow V : x \mapsto s(x) + t$$

mit einer bijektiven linearen Abbildung  $s$  und einem Vektor  $t$ . Für die Koordinaten bezüglich einer Basis  $B$  gilt dann:

$$\alpha(x)_B = Sx_B + t_B.$$

Dabei ist  $S$  die Matrix von  $s$  bezüglich  $B$ .

Aus  $x' = s(x) + t$  folgt  $x = s^{-1}(x' - t)$ . Die zu  $\alpha$  inverse Affinität sieht daher so aus:

$$\alpha^{-1} : V \rightarrow V : x' \mapsto s^{-1}(x') + t' \quad \text{mit } t' = -s^{-1}(t).$$

also

$$\alpha^{-1}(x')_B = S^{-1}x'_B + t'_B.$$

Sei nun  $x_B^T A x_B + b x_B + c = 0$  die Gleichung einer Quadrik  $Q$  bezüglich der Basis  $B$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \alpha(Q) &= \{\alpha(x) : x \in Q\} = \{x' : \alpha^{-1}(x') \in Q\} = \{x' : s^{-1}(x') + t' \in Q\} = \\ &= \{x' : (S^{-1}x'_B + t'_B)^T A (S^{-1}x'_B + t'_B) + b (S^{-1}x'_B + t'_B) + c = 0\} = \\ &= \{x' : x'^T (S^{-1})^T A S^{-1}x'_B + (2 t'^T_B A + b) S^{-1}x'_B + (t'^T_B A + b) t'_B + c = 0\}. \end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt, dass

$$t'^T_B A S^{-1}x'_B = (S^{-1}x'_B)^T A t'_B.$$

Das sieht man so ein: Zunächst gilt  $(t'^T_B A S^{-1}x'_B)^T = (S^{-1}x'_B)^T A t'_B$ , da ja  $A^T = A$ . Nun ist aber  $t'^T_B A S^{-1}x'_B$  eine  $1 \times 1$ -Matrix und stimmt daher mit ihrer Transponierten überein.

Die Gleichung von  $\alpha(Q)$  entsteht, indem man für  $x_B$  jeweils  $S^{-1}x'_B + t'_B$  einsetzt. Den Übergang von der Gleichung von  $Q$  zu der Gleichung von  $\alpha(Q)$  nennt man daher auch eine *(affine) Substitution*.

Es gilt also

$$\alpha(Q) = \{x' : x'^T_B A' x'_B + b' x'_B + c' = 0\}$$

mit

$$\begin{aligned} A' &= (S^{-1})^T A S^{-1}, \\ b' &= (2 t_B^T A + b) S^{-1}, \\ c' &= (t_B^T A + b) t_B' + c. \end{aligned}$$

Wir sehen daher: *Bei Anwendung einer Affinität auf eine Quadrik  $Q$  ändert sich die Matrix der zugehörigen quadratischen Form genauso wie beim Übergang zu einer anderen Basis:  $A' = R^T A R$  mit  $R = S^{-1}$ .*

Wir werden nun sehen, dass es zu jeder Quadrik  $Q$  eine Affinität  $\alpha$  gibt, sodass die Gleichung von  $\alpha(Q)$  eine besonders einfache Gestalt hat. Wir formulieren und beweisen dieses Resultat der Einfachheit halber nur für die kanonische Basis im  $\mathbb{R}^d$ .

**Satz 3.186** *Im  $\mathbb{R}^d$  gibt es zu jeder Quadrik  $Q$  eine Affinität  $\alpha$ , sodass die Gleichung von  $\alpha(Q)$  (bezüglich der kanonischen Basis) einem der folgenden drei **Normalformentypen** angehört:*

- (1)  $x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2 = 0$  mit  $\frac{r}{2} \leq p \leq r \leq d$ ,
- (2)  $x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2 + 1 = 0$  mit  $0 \leq p \leq r \leq d$ ,
- (3)  $x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2 + x_{r+1} = 0$  mit  $\frac{r}{2} \leq p \leq r < d$ .

Dabei ist  $r$  gleich dem Rang und  $p$  gleich dem Trägheitsindex der entsprechenden Matrix.

**Definition 3.187** *Im Falle von Typ (1) nennt man  $Q$  eine **kegelige Quadrik**, bei Typ (2) eine **Mittelpunktsquadrik**, und bei Typ (3) eine **parabolische Quadrik**.*

(Bezüglich der Herkunft dieser Bezeichnungen siehe Abschnitt "Affine Klassifikation der Quadriken im  $\mathbb{R}^3$ ".)

*Beweis* des Satzes: Die Gleichung von  $Q$  bezüglich der kanonischen Basis laute

$$x^T A x + b x + c = 0$$

Nach Satz 3.177 gibt es eine reguläre Matrix  $R$ , sodass  $A' = R^T A R$  eine Diagonalmatrix ist, in deren Diagonalen nur die Werte  $\pm 1$  und  $0$  vorkommen. Sei wieder  $p$  die Anzahl der  $+1$  und  $r-p$  die Anzahl der  $-1$ . Wenden wir die Affinität  $x \mapsto R^{-1}x$  (d.h. die Substitution  $x = Rx'$ ) auf die Quadrik an, so

erhalten wir daher eine Gleichung folgender Gestalt, wenn wir statt  $x'$  gleich wieder  $x$  schreiben:

$$x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2 + b'x + c = 0$$

oder ausführlicher

$$x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2 + b'_1 x_1 + \dots + b'_d x_d + c = 0$$

mit  $b' = bR$ . ( $c$  bleibt unverändert.)

Wir wenden nun wieder die Methode der quadratischen Ergänzung an (siehe Beweis von Satz 3.175): Für  $1 \leq i \leq p$  betrachten wir

$$x_i^2 + b'_i x_i = \left( x_i + \frac{b'_i}{2} \right)^2 - \frac{b'^2_i}{4},$$

und für  $p < i \leq r$  analog

$$-x_i^2 + b'_i x_i = - \left( x_i - \frac{b'_i}{2} \right)^2 + \frac{b'^2_i}{4}.$$

Durch die folgenderweise definierte Translation

$$x'_i = \begin{cases} x_i + \frac{b'_i}{2} & \text{für } 1 \leq i \leq p, \\ x_i - \frac{b'_i}{2} & \text{für } p < i \leq r, \\ x_i & \text{für } r < i \leq d \end{cases}$$

erhalten wir folgende Gleichung:

$$x_1'^2 + \dots + x_p'^2 - x_{p+1}'^2 - \dots - x_r'^2 + b'_{r+1} x_{r+1}' + \dots + b'_d x_d' + c' = 0$$

$$\text{mit } c' = -\frac{b'^2_1}{4} - \dots - \frac{b'^2_p}{4} + \frac{b'^2_{p+1}}{4} + \dots + \frac{b'^2_r}{4} + c.$$

Wir unterscheiden nun drei Fälle:

1. Fall:  $b'_{r+1} = \dots = b'_d = c' = 0$ .

Hier liegt bereits eine Normalform vom Typ (1) vor. Wenn  $p < \frac{r}{2}$  ist, so kann man durch Multiplikation der Gleichung mit  $-1$  und Umnummerierung erreichen, dass  $p \geq \frac{r}{2}$  ist.

2. Fall:  $b'_{r+1} = \dots = b'_d = 0$ , aber  $c' \neq 0$ .

Hier lautet die Gleichung  $x_1'^2 + \dots + x_p'^2 - x_{p+1}'^2 - \dots - x_r'^2 + c' = 0$ .

Falls  $c' > 0$  ist, verwenden wir die Substitution  $x'_i = x''_i \sqrt{c'}$ . Das ergibt  $x'^2_i = x''^2_i c'$ . Nach Division durch  $c'$  und Weglassung der Striche erhalten wir eine Normalform vom Typ (2).

Falls  $c' < 0$  ist, substituieren wir  $x'_i = x''_i \sqrt{-c'}$ , also  $x'^2_i = -x''^2_i c'$ . Nach Division durch  $c'$  und Weglassung der Striche erhalten wir

$$-x_1^2 - \dots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \dots + x_r^2 + 1 = 0.$$

Das ergibt ebenfalls eine Normalform vom Typ (2), wenn wir die Nummerierung der  $x_i$  entsprechend ändern, indem wir z.B.  $x_i$  durch  $x_{r+1-i}$  ersetzen:

$$x_1^2 + \dots + x_{r-p}^2 - x_{r-p+1}^2 - \dots - x_r^2 + 1 = 0.$$

3. Fall: Es gibt einen Index  $i_0$  mit  $r < i_0 \leq d$ , sodass  $b'_{i_0} \neq 0$ .

O.B.d.A. können wir annehmen, dass  $i_0 = r + 1$  ist. Mit folgender Transformation

$$\begin{aligned} x''_{r+1} &= b'_{r+1} x'_{r+1} + \dots + b'_d x'_d + c', \\ x''_i &= x'_i \quad \text{für } i \neq r + 1. \end{aligned}$$

kommen wir auf eine Normalform vom Typ (3). Diese Transformation beschreibt tatsächlich eine Affinität, denn die entsprechende Matrix ist offensichtlich regulär:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & b'_{r+1} & \dots & \dots & b'_d \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Auch hier kann man erreichen, dass  $p \geq \frac{r}{2}$  ist: Andernfalls multiplizieren wir die Gleichung mit  $-1$ , substituieren  $x'_{r+1} = -x_{r+1}$  und ändern die Nummerierung von  $x_1, \dots, x_r$  durch die Substitution  $x'_i = x_{r+1-i}$  für  $1 \leq i \leq r$ .  $\square$

*Beispiel:*

Nehmen wir die schon vorhin betrachtete Gleichung

$$4x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 + x_1 + 5x_2 + 6 = 0.$$

Zunächst eliminieren wir das "gemischte Glied"  $2x_1x_2$  durch quadratische Ergänzung (siehe Beweis von Satz 3.177):  $4x_1^2 + 2x_1x_2 = 4(x_1^2 + \frac{1}{2}x_1x_2) = 4(x_1 + \frac{1}{4}x_2)^2 - \frac{1}{4}x_2^2$ , also setzen wir  $x'_1 = x_1 + \frac{1}{4}x_2$  bzw.  $x_1 = x'_1 - \frac{1}{4}x_2$  sowie  $x'_2 = x_2$  und erhalten

$$4x'^2_1 - \frac{9}{4}x'^2_2 + x'_1 + \frac{19}{4}x'_2 + 6 = 0.$$

Jetzt setzen wir  $x''_1 = 2x'_1$  und  $x''_2 = \frac{3}{2}x'_2$  und erhalten nach Weglassung der Striche

$$x_1^2 - x_2^2 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{19}{6}x_2 + 6 = 0.$$

Wir ergänzen nochmals quadratisch (gemäß Beweis von Satz 3.186):

$$x_1^2 + \frac{1}{2}x_1 = (x_1 + \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{16}, \quad x_2^2 - \frac{19}{6}x_2 = (x_2 - \frac{19}{12})^2 - (\frac{19}{12})^2.$$

Die entsprechende Substitution ergibt

$$x_1^2 - x_2^2 - \frac{1}{16} + \left(\frac{19}{12}\right)^2 + 6 = 0.$$

$-\frac{1}{16} + \left(\frac{19}{12}\right)^2 + 6 = \frac{76}{9} > 0$ . Es liegt also der 2. Fall vor, und die Transformation  $x_i = x'_i \sqrt{\frac{76}{9}}$  ergibt (nach Weglassung der Striche) die Normalform

$$x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0.$$

Es handelt sich daher um eine Hyperbel (siehe Seite 126).

### Affine Klassifikation der Quadriken im $\mathbb{R}^2$

Die Quadriken im  $\mathbb{R}^2$  heißen auch *Kurven 2. Ordnung*. Wir können sie nach den Werten von  $p$  und  $r$  gemäß Satz 3.186 klassifizieren. Dabei können wir gleich einige charakteristischen Eigenschaften der einzelnen Klassen feststellen und auch eine anschauliche Vorstellung gewinnen.

Der Fall  $r = 0$  ist besonders trivial. In diesem Fall ist  $G$  die Nullform. Bei Typ (1) ist die Lösungsmenge der ganze  $\mathbb{R}^2$ , bei Typ (2) die leere Menge, und bei Typ (3) lautet die Gleichung  $x_1 = 0$ , das ist also eine Gerade.

Die weiteren Fälle werden nun im Folgenden systematisch besprochen.

#### Typ (1):

**r = 1, p = 1 :**

*Normalform:*  $x_1^2 = 0$ .

*Bezeichnung:* **Doppelgerade.**

*Erklärung:* Eigentlich handelt es sich einfach um die Gerade  $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\}$ . Im Sinne der Algebra hat aber die Gleichung  $x^2 = 0$  die Zahl 0 als Doppelwurzel (d.h. Wurzel mit Vielfachheit 2). Daher kommt die angegebene Bezeichnung.

**r = 2, p = 1 :**

*Normalform:*  $x_1^2 - x_2^2 = 0$ .

*Bezeichnung:* **schneidendes Geradenpaar.**

*Erklärung:*  $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \vee x_1 - x_2 = 0$ . Die Lösungsmenge der Gleichung ist daher die Vereinigung der beiden Geraden mit den Gleichungen  $x_1 + x_2 = 0$  und  $x_1 - x_2 = 0$ . Diese beiden Geraden haben genau einen Schnittpunkt, nämlich  $(0, 0)$ .

**r = 2, p = 2 :**

*Normalform:*  $x_1^2 + x_2^2 = 0$ .

*Bezeichnung:* **nullteiliges schneidendes Geradenpaar** (mit reellem Schnittpunkt).

*Erklärung:* Die Lösungsmenge der Gleichung besteht offensichtlich nur aus dem Punkt  $(0, 0)$ . Betrachtet man dieselbe Gleichung in  $\mathbb{C}^2$ , so gilt  $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 + ix_2 = 0 \vee x_1 - ix_2 = 0$ . Die Lösungsmenge ist dann ein Paar von Geraden in  $\mathbb{C}^2$  mit dem Ursprung  $(0, 0)$  als Schnittpunkt.

**Typ (2):**

**r = 1, p = 0 :**

*Normalform:*  $-x_1^2 + 1 = 0$ , das heißt  $x_1^2 = 1$ .

*Bezeichnung:* **paralleles Geradenpaar.**

*Erklärung:*  $x_1^2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = 1 \vee x_1 = -1$ . Die Lösungsmenge ist also die Vereinigung von zwei parallelen Geraden.

**r = 1, p = 1 :**

*Normalform:*  $x_1^2 + 1 = 0$ .

*Bezeichnung: nullteiliges paralleles Geradenpaar.*

*Erklärung:* Im  $\mathbb{R}^2$  ist die Lösungsmenge offensichtlich leer. In  $\mathbb{C}^2$  gilt  $x_1^2 + 1 = (x_1 + i)(x_1 - i) = 0 \Leftrightarrow x_1 + i = 0 \vee x_1 - i = 0$ , die Lösungsmenge ist dann also ein Paar paralleler Geraden.

**r = 2, p = 0 :**

*Normalform:*  $-x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$ , das heißt  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ .

*Bezeichnung: Ellipse.*

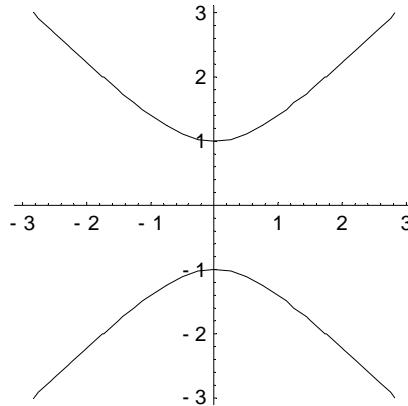
*Erklärung:* Die Gleichung beschreibt offensichtlich den Einheitskreis. Die Bezeichnung lautet "Ellipse", weil wir ja damit alle Quadriken im  $\mathbb{R}^2$  meinen, welche sich durch eine Affinität auf den Einheitskreis abbilden lassen. (Das ist also im Rahmen dieser Theorie die Definition des Begriffs "Ellipse".)

**r = 2, p = 1 :**

*Normalform:*  $x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$ , das heißt  $x_2^2 - x_1^2 = 1$ .

*Bezeichnung: Hyperbel.*

*Erklärung:* Wir verstehen unter einer Hyperbel eine Quadrik im  $\mathbb{R}^2$ , welche sich durch eine Affinität auf die Menge  $\{(x_1, x_2) : x_2^2 - x_1^2 = 1\}$  abbilden lässt. Diese "Einheitshyperbel" sieht so aus:



**r = 2, p = 2 :**

*Normalform:*  $x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$ .

*Bezeichnung: nullteiliger Kegelschnitt.*

*Erklärung:* Im  $\mathbb{R}^2$  ist die Lösungsmenge leer. Im  $\mathbb{C}^2$  kann man diese Normalform auf die der Ellipse oder Hyperbel transformieren (vgl. Satz 3.176).

Da Ellipsen und Hyperbeln als ebene Schnitte von Kegeln dargestellt werden können (siehe Abschnitt 3.5.3), erklärt sich die Bezeichnung "nullteiliger Kegelschnitt".

### Typ (3):

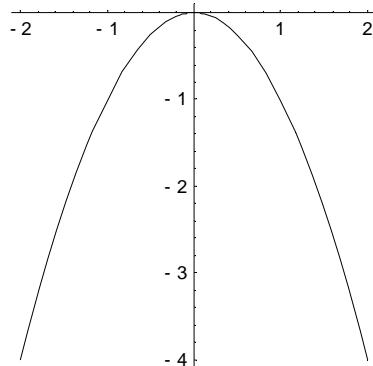
Hier gibt es nur den folgenden Fall:

$$\mathbf{r} = \mathbf{1}, \mathbf{p} = \mathbf{1} :$$

*Normalform:*  $x_1^2 + x_2 = 0$  (das ergibt nach der Substitution  $x_2 = -2x_1'$  die oft verwendete Form  $x_1^2 = 2x_2$ ).

*Bezeichnung:* **Parabel.**

*Erklärung:* In unserem Aufbau der Theorie verstehen wir unter einer Parabel eine Quadrik im  $\mathbb{R}^2$ , welche sich durch eine Affinität auf die Menge  $\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2 = 0\}$  abbilden lässt. Diese "Einheitsparabel" sieht so aus:



### Affine Klassifikation der Quadriken im $\mathbb{R}^3$

Die Quadriken im  $\mathbb{R}^3$  heißen auch *Flächen 2. Ordnung*. Wenn wir den trivialen Fall der Nullform ( $r = 0$ ) beiseite lassen, erhalten wir folgende Klassifikation:

### Typ (1):

$$\mathbf{r} = \mathbf{1}, \mathbf{p} = \mathbf{1} :$$

*Normalform:*  $x_1^2 = 0$ .

*Bezeichnung: Doppelebene.*

*Erklärung:* Analog zur Doppelgeraden (siehe Typ (1) im  $\mathbb{R}^2$ ).

**r = 2, p = 1 :**

*Normalform:*  $x_1^2 - x_2^2 = 0$ .

*Bezeichnung: schneidendes Ebenenpaar.*

*Erklärung:* Analog zum schneidenden Geradenpaar (siehe Typ (1) im  $\mathbb{R}^2$ ).

**r = 2, p = 2 :**

*Normalform:*  $x_1^2 + x_2^2 = 0$ .

*Bezeichnung: nullteiliges schneidendes Ebenenpaar* (mit reeller Schnittgeraden).

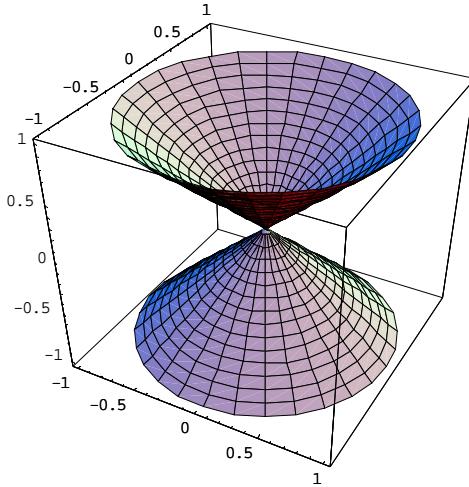
*Erklärung:* Die Lösungsmenge ist im  $\mathbb{R}^3$  die Gerade  $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = x_2 = 0\}$ , also die dritte Koordinatenachse. In  $\mathbb{C}^3$  erhält man jedoch analog zum nullteiligen schneidenden Geradenpaar die beiden Ebenen mit Gleichungen  $x_1 + ix_2 = 0$  bzw.  $x_1 - ix_2 = 0$ , welche sich in der angegebenen reellen Geraden schneiden.

**r = 3, p = 2 :**

*Normalform:*  $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ .

*Bezeichnung: Kegel.*

*Erklärung:* Das ist (im Rahmen unserer Theorie) die Definition eines Kegels. Besser wäre vielleicht "Doppelkegel", denn diese Fläche sieht so aus:



(Die Abbildung zeigt natürlich nur einen Teil des unendlich großen Doppelkegels.)

Unter einem Kegel verstehen wir also eine Quadrik im  $\mathbb{R}^3$ , welche sich durch eine Affinität auf die Lösungsmenge der Gleichung  $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$  abbilden lässt. Der Punkt, welcher dabei auf den Ursprung abgebildet wird, heißt *Spitze* des Kegels.

*Schnitte mit speziellen Ebenen:*

Wir bezeichnen im Folgenden den Kegel  $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0\}$  mit  $K$ .

a) "waagrechte" Schnitte

Sei  $c$  eine beliebige reelle Zahl und  $H$  die Ebene mit Gleichung  $x_3 = c$ . Dann ist  $K \cap H$  die Menge  $Q := \{(x_1, x_2, c) : x_1^2 + x_2^2 - c^2 = 0\}$ .

Die Ebene  $H$  ist ein affiner Teilraum des  $\mathbb{R}^3$  und kann durch die folgende Affinität bijektiv auf den  $\mathbb{R}^2$  abgebildet werden:

$$\alpha : H \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2, c) \mapsto (x_1, x_2).$$

$\alpha$  bildet die Menge  $Q$  auf die folgende Quadrik des  $\mathbb{R}^2$  ab:

$$Q' := \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 - c^2 = 0\},$$

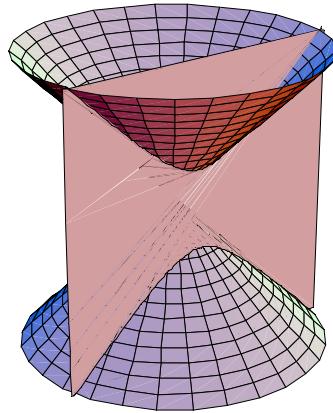
und das ist für  $c \neq 0$  eine Ellipse, wie man mit der Substitution  $x_i = cx'_i$  sofort sieht. Für  $c = 0$  ist  $Q'$  ein nullteiliges schneidendes Geradenpaar, besteht also nur aus dem Ursprung.

b) "senkrechte" Schnitte

Sei  $H$  jetzt eine Ebene mit Gleichung  $x_1 = c$ . Dann ist  $K \cap H = \{(c, x_2, x_3) : c^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0\}$ , und das bezeichnen wir wieder mit  $Q$ . Wir können natürlich auch schreiben  $Q = \{(c, x_1, x_2) : c^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0\}$ .

Jetzt verwenden wir die durch  $(c, x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2)$  definierte Affinität von  $H$  auf  $\mathbb{R}^2$  und erhalten  $Q' = \{(x_1, x_2) : c^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0\}$ . Das ist jetzt für  $c \neq 0$  eine Hyperbel, wie die Substitution  $x_i = cx'_i$  zeigt. Für  $c = 0$  ergibt sich ein schneidendes Geradenpaar.

Ganz analog sieht man, dass die Schnitte mit den Ebenen  $x_2 = c$  für  $c \neq 0$  Hyperbeln liefern.



**r = 3, p = 3 :**

*Normalform:*  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ .

*Bezeichnung:* **nullteiliger Kegel** (mit reeller Spitze).

*Erklärung:* Die Lösungsmenge besteht im  $\mathbb{R}^3$  nur aus dem Ursprung. Im  $\mathbb{C}^3$  kann man jedoch durch die Substitution  $x_3 = ix'_3$  die Normalform eines Kegels erreichen.

**Typ (2):**

**r = 1, p = 0 :**

*Normalform:*  $-x_1^2 + 1 = 0$ , das heißt  $x_1^2 = 1$ .

*Bezeichnung:* **paralleles Ebenenpaar.**

*Erklärung:* Analog zum parallelen Geradenpaar (siehe Typ (2) im  $\mathbb{R}^2$ ).

**r = 1, p = 1 :**

*Normalform:*  $x_1^2 + 1 = 0$ .

*Bezeichnung:* **nullteiliges paralleles Ebenenpaar.**

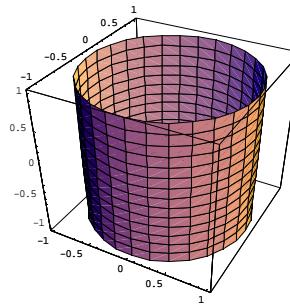
*Erklärung:* Analog zum nullteiligen parallelen Geradenpaar (siehe Typ (2) im  $\mathbb{R}^2$ ).

$\mathbf{r} = 2, \mathbf{p} = 0 :$

Normalform:  $-x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$ , das heißt  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ .

Bezeichnung: **elliptischer Zylinder**.

Erklärung: Diese Quadrik sieht so aus:



(Das ist natürlich wieder nur ein Teil dieser unendlich großen Fläche.)

Schnitte mit speziellen Ebenen:

a) "waagrechte" Schnitte

In derselben Weise wie beim Kegel sieht man, dass der Durchschnitt mit jeder Ebene mit Gleichung  $x_3 = c$  eine Ellipse mit Gleichung  $x_1^2 + x_2^2 = 1$  ist.

b) "senkrechte" Schnitte

Der Durchschnitt mit einer Ebene mit Gleichung  $x_2 = c$  führt auf die Gleichung  $x_1^2 + c^2 = 1$ , das heißt  $x_1^2 = 1 - c^2$ . Für  $c^2 < 1$  zeigt die Substitution  $x_1 = x_1' \sqrt{1 - c^2}$ , dass es sich um ein paralleles Geradenpaar handelt. Für  $c^2 = 1$  ergibt sich eine Doppelgerade, und für  $c^2 > 1$  ein nullteiliges paralleles Geradenpaar.

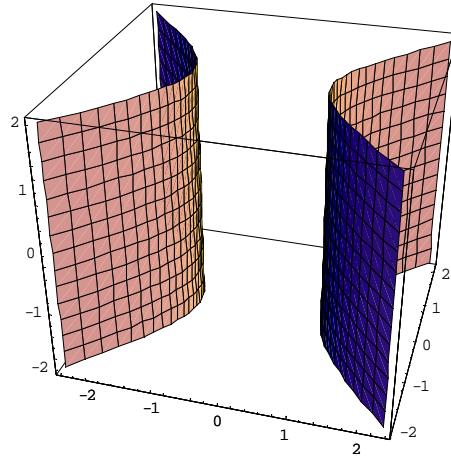
Für  $x_1 = c$  geht es analog, man braucht nur  $x_1$  und  $x_2$  zu vertauschen.

$\mathbf{r} = 2, \mathbf{p} = 1 :$

Normalform:  $x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$ , oder nach Vertauschung von  $x_1$  und  $x_2$ :  $x_1^2 - x_2^2 = 1$ .

Bezeichnung: **hyperbolischer Zylinder**.

*Erklärung:* Diese Quadrik sieht so aus:



*Schnitte mit speziellen Ebenen:*

a) "waagrechte" Schnitte

Der Durchschnitt mit  $x_3 = c$  liefert für alle  $c$  die Hyperbel mit Gleichung  $x_1^2 - x_2^2 = 1$ .

b) "senkrechte" Schnitte

Schneiden wir mit  $x_1 = c$ , so erhalten wir  $c^2 - x_2^2 = 1$ , d.h.  $x_2^2 = c^2 - 1$ . Für  $c^2 > 1$  ist das ein paralleles Geradenpaar, für  $c^2 = 1$  eine Doppelgerade, und für  $c^2 < 1$  ein nullteiliges paralleles Geradenpaar.

Der Schnitt mit  $x_2 = c$  liefert  $x_1^2 - c^2 = 1$ , also  $x_1^2 = 1 + c^2$ , und das ist für alle  $c$  ein paralleles Geradenpaar.

**r = 2, p = 2 :**

*Normalform:*  $x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$ .

*Bezeichnung:* **nullteiliger Zylinder.**

*Erklärung:* Die Lösungsmenge ist im  $\mathbb{R}^3$  leer. Im  $\mathbb{C}^3$  kann man z.B. durch die Substitution  $x_1 = ix'_1$ ,  $x_2 = ix'_2$  die Normalform eines elliptischen Zylinders erreichen.

**r = 3, p = 0 :**

*Normalform:*  $-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0$ , das heißt  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ .

*Bezeichnung:* **Ellipsoid.**

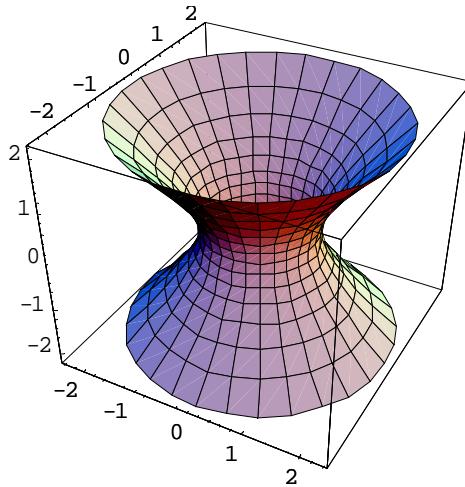
*Erklärung:* Die Gleichung beschreibt die Einheitssphäre (das ist die Oberfläche der Einheitskugel, siehe Kapitel 4.4). Ein Ellipsoid wird also definiert als eine Quadrik im  $\mathbb{R}^3$ , welche sich durch eine Affinität auf die Einheitssphäre abbilden lässt.

**$r = 3, p = 1$ :**

*Normalform:*  $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0$ , oder nach Umnummerierung der Koordinaten:  $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$ .

*Bezeichnung:* einschaliges Hyperboloid.

*Erklärung:* Die Quadrik mit Gleichung  $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$  sieht so aus:



*Schnitte mit speziellen Ebenen:*

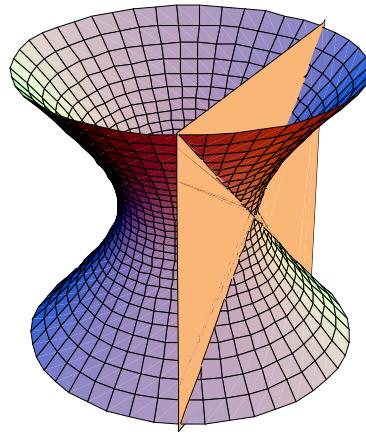
a) "waagrechte" Ebenen

Der Schnitt mit  $x_3 = c$  ergibt die Gleichung  $x_1^2 + x_2^2 = 1 + c^2$ . Das ist für alle  $c$  eine Ellipse.

b) "senkrechte" Ebenen

Der Schnitt mit  $x_2 = c$  ergibt  $x_1^2 - x_3^2 = 1 - c^2$ , nach Vertauschung von  $x_2$  mit  $x_3$  also  $x_1^2 - x_2^2 = 1 - c^2$ . Das ist für  $c^2 \neq 1$  eine Hyperbel (Substitution  $x_i = x'_i \sqrt{1 - c^2}$  oder  $x_i = x'_i \sqrt{c^2 - 1}$ , je nachdem  $c^2 < 1$  oder  $> 1$  ist.)

Für  $c^2 = 1$  ergibt sich ein schneidendes Geradenpaar, wie in der folgenden Abbildung (natürlich nur näherungsweise) zu sehen ist.

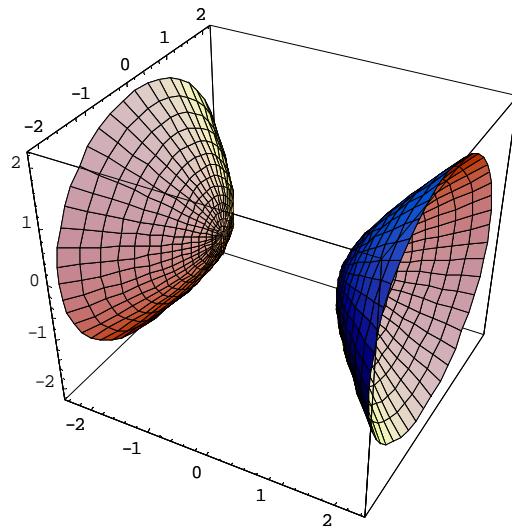


**r = 3, p = 2 :**

*Normalform:*  $x_1^2 + x_2^2 - x_3^3 + 1 = 0$ , oder nach Umnummerierung der Koordinaten:  $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1$ .

*Bezeichnung:* **zweischaliges Hyperboloid.**

*Erklärung:* Die Quadrik mit Gleichung  $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1$  sieht so aus:



*Schnitte mit speziellen Ebenen:*

$x_1 = c$  ergibt  $c^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1$ , also (nach der Substitution  $x_2 = x'_1$  und  $x_3 = x'_2$ ):  $x_1^2 + x_2^2 = c^2 - 1$ . Das ist für  $c^2 > 1$  eine Ellipse, für  $c^2 = 1$  ein Punkt (nullteiliges schneidendes Geradenpaar), und für  $c^2 < 1$  die leere Menge (nullteiliger Kegelschnitt).

$x_3 = c$  ergibt  $x_1^2 - x_2^2 = 1 + c^2$ , und das ist für alle  $c$  eine Hyperbel.

$x_2 = c$  liefert ebenfalls eine Hyperbel.

**r = 3, p = 3 :**

*Normalform:*  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$ .

*Bezeichnung:* **nullteilige Mittelpunktsquadrik.**

*Erklärung:* Die Lösungsmenge ist im  $\mathbb{R}^3$  die leere Menge. Die Quadriken vom Typ (2) heißen allgemein Mittelpunktsquadriken (siehe Abschnitt 3.5.3).

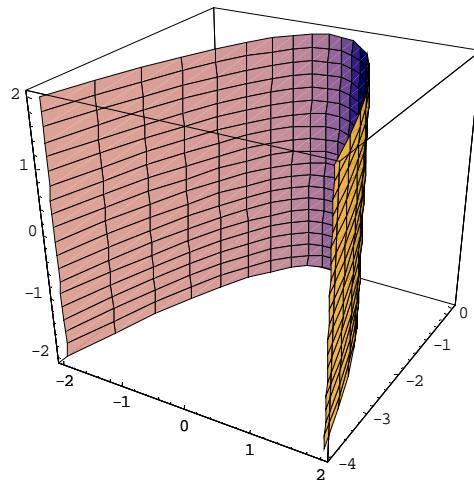
**Typ (3):**

**r = 1, p = 1 :**

*Normalform:*  $x_1^2 + x_2 = 0$ .

*Bezeichnung:* **parabolischer Zylinder.**

*Erklärung:* Diese Quadrik sieht so aus:



*Schnitte mit speziellen Ebenen:*

a) "waagrechte" Ebenen:

$x_3 = c$  liefert die Quadrik mit Gleichung  $x_1^2 + x_2 = 0$ , und das ist eine Parabel.

b) "senkrechte" Ebenen:

$x_1 = c$  ergibt  $c^2 + x_2 = 0$ , also nach Vertauschung von  $x_1$  und  $x_2$ :  $x_1 = -c^2$ . Das ist im  $\mathbb{R}^2$  eine Gerade.

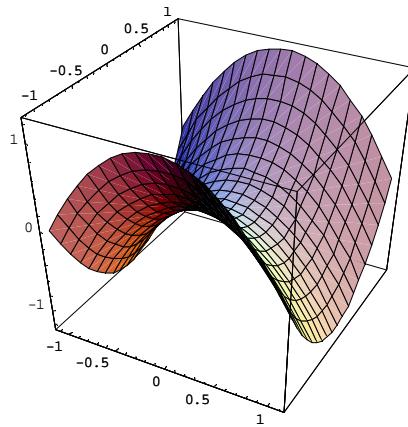
$x_2 = c$  ergibt  $x_1^2 = -c$ . Das ist für  $c < 0$  ein paralleles Geradenpaar, für  $c = 0$  eine Doppelgerade, und für  $c > 0$  die leere Menge (nullteiliges paralleles Geradenpaar).

$\mathbf{r} = 2, \mathbf{p} = 1$ :

Normalform:  $x_1^2 - x_2^2 + x_3 = 0$ .

Bezeichnung: **hyperbolisches Paraboloid**.

Erklärung: Die folgende Abbildung zeigt ein Stück dieser Quadrik. Die Bezeichnung wird, wie schon bei den vorigen Klassen, durch die Betrachtung spezieller ebener Schnitte verständlich.

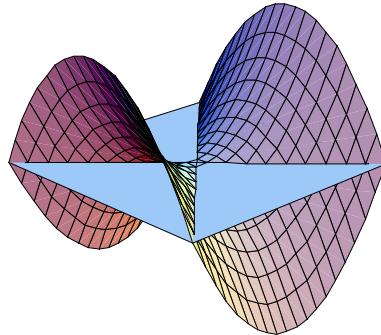


Schnitte mit speziellen Ebenen:

a) "waagrechte" Ebenen:

$x_3 = c$  ergibt  $x_1^2 - x_2^2 + c = 0$ , das ist für  $c \neq 0$  eine Hyperbel und für  $c = 0$  ein schneidendes Geradenpaar.

Die folgende Abbildung zeigt den Fall  $c = 0$ .



b) "senkrechte" Ebenen:

$x_1 = c$  ergibt  $c^2 - x_2^2 + x_3 = 0$ . Nach Ummumerierung der Koordinaten heißt das  $x_1^2 + (-x_2 - c^2) = 0$ . Die Substitution  $x'_2 = -x_2 - c^2$  liefert dann  $x_1^2 + x'_2 = 0$ , also eine Parabel.

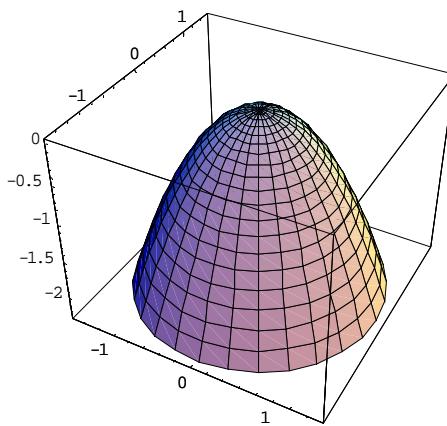
$x_2 = c$  ergibt in analoger Weise eine Parabel.

$\mathbf{r} = \mathbf{2}$ ,  $\mathbf{p} = \mathbf{2}$ :

Normalform:  $x_1^2 + x_2^2 + x_3 = 0$ .

Bezeichnung: **elliptisches Paraboloid**.

Erklärung: Diese Quadrik sieht so aus:



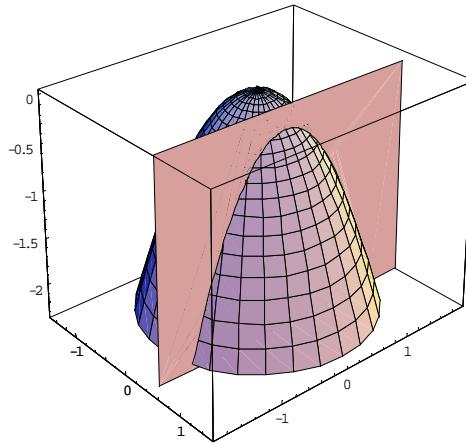
*Schnitte mit speziellen Ebenen:*

a) "waagrechte" Ebenen:

$x_3 = c$  ergibt  $x_1^2 + x_2^2 = -c$ . Für  $c < 0$  ist das eine Ellipse, für  $c = 0$  ein Punkt (nullteiliges schneidendes Geradenpaar), und für  $c > 0$  die leere Menge (nullteiliger Kegelschnitt).

b) "senkrechte" Ebenen:

$x_1 = c$  ergibt  $c^2 + x_2^2 + x_3 = 0$ . Nach Ummumerierung heißt das  $x_1^2 + (x_2 + c^2) = 0$ , und die Substitution  $x'_2 = x_2 + c^2$  liefert  $x_1^2 + x'_2 = 0$ . Das ist also für alle  $c$  eine Parabel. Die folgende Abbildung zeigt den Fall  $c = \frac{1}{2}$ .



$x_2 = c$  liefert in analoger Weise eine Parabel.

*Beispiel für die Klassifizierung einer Quadrik im  $\mathbb{R}^3$ :*

Sei  $Q$  die Quadrik mit folgender Gleichung:  $x_1^2 + 4x_1x_2 + x_1 + 2x_3 - 5 = 0$ .

Zunächst eliminieren wir das gemischte Glied  $4x_1x_2$  durch quadratische Ergänzung:

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + x_1 + 2x_3 - 5 = (x_1 + 2x_2)^2 - 4x_2^2 + x_1 + 2x_3 - 5.$$

Die Substitution  $x'_1 = x_1 + 2x_2$  bzw.  $x_1 = x'_1 - 2x_2$  ergibt (nach Weglassung der Striche)  $x_1^2 - 4x_2^2 + x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 5$ .

Jetzt setzen wir  $x'_2 = 2x_2$  und erhalten  $x_1^2 - x_2^2 + x_1 - x_2 + 2x_3 - 5$ . Nochmalige quadratische Ergänzung ergibt  $(x_1 + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - (x_2 + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} + 2x_3 - 5$ .

Nun substituieren wir  $x'_1 = x_1 + \frac{1}{2}$ ,  $x'_2 = x_2 + \frac{1}{2}$ ,  $x'_3 = 2x_3 - 5$ , und erhalten die Gleichung  $x_1^2 - x_2^2 + x_3 = 0$ . Es handelt sich also um ein hyperbolisches Paraboloid.

### Kegelschnitte

Wir haben schon gesehen, dass Ellipsen und Hyperbeln als ebene Schnitte eines Kegels auftreten können. Wir überlegen uns jetzt, dass mit Ausnahme des parallelen Geradenpaares auch alle anderen nicht leeren zweidimensionalen Quadriken (mit  $r > 0$ ) als ebene Schnitte eines Kegels dargestellt werden können, und daher die Bezeichnung *Kegelschnitte* für diese Quadriken gerechtfertigt ist.

Im Folgenden werden der Reihe nach für alle Klassen von nicht leeren Quadriken im  $\mathbb{R}^2$  Ebenen angegeben, deren Schnitt mit dem Kegel mit Gleichung  $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$  eine entsprechende Quadrik ergibt.

#### Typ (1):

**r = 1, p = 1 :**

*Ebene:*  $x_2 - x_3 = 0$ , d.h.  $x_2 = x_3$ .

*Schnitt:*  $x_1^2 = 0$ , das ist eine Doppelgerade.

Genauer: Man erhält die Teilmenge  $Q := \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 = 0\}$  der gegebenen Ebene, die wir mit  $H$  bezeichnen. Durch die Affinität

$$\alpha : H \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2)$$

wird  $Q$  auf  $Q' := \{(x_1, x_2) : x_1^2 = 0\}$  abgebildet, und das ist eine Doppelgerade im  $\mathbb{R}^2$ .

**r = 2, p = 1 :**

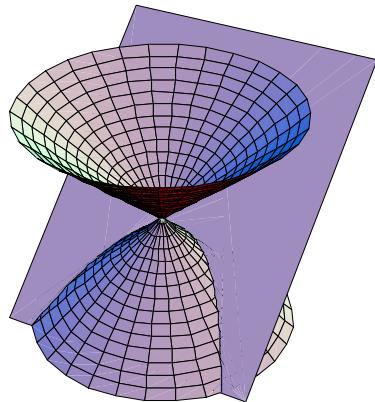
*Ebene:*  $x_1 = 0$ .

*Schnitt:*  $x_2^2 - x_3^2 = 0$  ergibt nach der Substitution  $x_2 = x'_1$ ,  $x_3 = x'_2$  die Normalform  $x_1^2 - x_2^2 = 0$  eines schneidenden Geradenpaares. (Genauer muss man wieder die Ebene durch eine geeignete Affinität auf den  $\mathbb{R}^2$  abbilden. Im Folgenden wird das nicht jedesmal betont.)

**r = 2, p = 2 :**

*Ebene:*  $x_3 = 0$ .

*Schnitt:*  $x_1^2 + x_2^2 = 0$ , ein nullteiliges schneidendes Geradenpaar.

**Typ (2):** $\mathbf{r} = \mathbf{2}, \mathbf{p} = \mathbf{0} :$ *Ebene:*  $x_3 = c$  mit  $c \neq 0$ .*Schnitt:* Ellipse, siehe Diskussion des Kegels (Seite 128). $\mathbf{r} = \mathbf{2}, \mathbf{p} = \mathbf{1} :$ *Ebene:*  $x_1 = c$  mit  $c \neq 0$ .*Schnitt:* Hyperbel, siehe Diskussion des Kegels (Seite 128).**Typ (3):** $\mathbf{r} = \mathbf{1}, \mathbf{p} = \mathbf{1} :$ *Ebene:*  $x_2 - x_3 = c$  mit  $c \neq 0$ .*Schnitt:*  $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = x_1^2 + (x_2 - x_3)(x_2 + x_3) = x_1^2 + c(x_2 + x_3) = 0$ .Mit der Substitution  $x'_2 = c(x_2 + x_3)$  erhalten wir  $x_1^2 + x'_2 = 0$ , also eine Parabel.

**Bemerkung 3.188** Der Durchschnitt einer beliebigen Quadrik im  $\mathbb{R}^d$  mit einem affinen Teilraum  $L$  ergibt eine Quadrik in diesem affinen Teilraum. Insbesondere entspricht also der Durchschnitt jeder Ebene mit einem Kegel (oder einem Hyperboloid etc.) einer Quadrik im  $\mathbb{R}^2$ .

Zum *Beweis*: Sei  $L = p + U$  ein (nicht leerer) affiner Teilraum und  $Q$  eine Quadrik im  $\mathbb{R}^d$ . Sei  $\{u_1, \dots, u_s\}$  eine Basis von  $U$ . Diese können wir zu einer Basis  $\{u_1, \dots, u_s, u_{s+1}, \dots, u_d\}$  des  $\mathbb{R}^d$  ergänzen. Es gibt dann eine (eindeutig bestimmte) Affinität  $\alpha : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ , sodass  $\alpha(o) = p$  und  $\alpha(e_i) = p + u_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, d\}$ .

Sei  $\tilde{\mathbb{R}}^s := \text{lin}(e_1, \dots, e_s) = \{x \in \mathbb{R}^d : x_{s+1} = \dots = x_d = 0\}$ . Dann sehen wir:  $\alpha(\tilde{\mathbb{R}}^s) = p + U = L$ , also

$$\alpha^{-1}(L \cap Q) = \alpha^{-1}(L) \cap \alpha^{-1}(Q) = \tilde{\mathbb{R}}^s \cap Q'$$

mit der Quadrik  $Q' := \alpha^{-1}(Q)$ .

$\tilde{\mathbb{R}}^s \cap Q'$  ist die Menge aller  $x \in \mathbb{R}^d$ , welche die Gleichung von  $Q'$  erfüllen und für die außerdem  $x_{s+1} = \dots = x_d = 0$  gilt. Durch die Affinität

$$\tilde{\mathbb{R}}^s \rightarrow \mathbb{R}^s : (x_1, \dots, x_s, 0, \dots, 0) \mapsto (x_1, \dots, x_s)$$

erhält man daraus eine Quadrik im  $\mathbb{R}^s$ .

Der Durchschnitt von  $Q$  mit  $L$  ist also eine Teilmenge von  $L$ , welche durch eine Affinität auf eine Quadrik im  $\mathbb{R}^s$  abgebildet werden kann, und so etwas nennen wir eine Quadrik in  $L$ .  $\square$

### Mittelpunkte von Quadriken

**Definition 3.189** Ein Punkt  $m$  heißt **Mittelpunkt** der Quadrik  $Q$ , wenn  $Q$  mit jedem Punkt  $p$  auch dessen Spiegelpunkt bezüglich  $m$ , nämlich  $p' = 2m - p$ , enthält.

Wenn  $p' = 2m - p$ , dann ist  $m$  der Mittelpunkt von  $p$  und  $p'$ , denn  $\frac{1}{2}(p + p') = \frac{1}{2}(p + 2m - p) = m$ . Offensichtlich ist also der Mittelpunkt einer Quadrik eine affine Invariante.

Die folgende Bemerkung macht jetzt die Bezeichnung "Mittelpunktsquadrik" verständlich:

**Bemerkung 3.190** Sei  $Q$  eine Mittelpunktsquadrik mit Gleichung  $x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2 + 1 = 0$  im  $\mathbb{R}^d$ . Dann ist der Ursprung ein Mittelpunkt von  $Q$ .

*Beweis:*

Sei  $G(x) := x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$ . Dann lautet die Gleichung von  $Q$  natürlich  $G(x) = -1$ . Wegen  $G(x) = G(-x)$  folgt aus  $p \in Q$  sofort  $-p \in Q$ . Also ist  $o$  ein Mittelpunkt von  $Q$ .  $\square$

Wir überlegen uns nun, wie man die Menge aller Mittelpunkte einer Quadrik bestimmen kann. Sei  $Q$  eine Quadrik mit Gleichung  $x^T Ax + b^T x + c = 0$ . Wenn  $m$  ein Mittelpunkt von  $Q$  ist, dann gilt für alle  $x \in Q$  sowohl  $x^T Ax + b^T x + c = 0$  als auch  $(2m - x)^T A(2m - x) + b^T(2m - x) + c = 0$ . Daraus folgt:

$$(2m - x)^T A(2m - x) + b^T(2m - x) + c = x^T Ax - 4m^T Ax - b^T x + 4m^T Am + 2b^T m + c =$$

(hier haben wir benutzt, dass  $x^T Am = (x^T Am)^T = m^T Ax$  ist, da  $x^T Am$  ja eine  $1 \times 1$ -Matrix ist)

$$\begin{aligned} &= (x^T Ax + b^T x + c) - 4m^T Ax - 2b^T x + 4m^T Am + 2b^T m = \\ &= -4m^T Ax - 2b^T x + 4m^T Am + 2b^T m = 0. \end{aligned}$$

Nach Division durch 2 ergibt sich  $(2m^T A + b^T)m = (2m^T A + b^T)x$  für alle  $x \in Q$ . Diese Gleichung können wir auch so schreiben:

$$(2Am + b) \cdot x = (2Am + b) \cdot m.$$

Für  $2Am + b \neq o$  handelt es sich um die Gleichung einer Hyperebene  $H$  im  $\mathbb{R}^d$ . Wenn diese Gleichung für alle  $x \in Q$  erfüllt ist, so heißt das  $Q \subset H$ . Abgesehen von diesem Sonderfall gilt also  $2Am + b = o$  für jeden Mittelpunkt  $m$  von  $Q$ .

Sei umgekehrt  $m$  ein beliebiger Punkt mit  $2Am + b = o$ . Dann gilt für alle  $x \in Q$  trivialerweise  $(2Am + b) \cdot x = (2Am + b) \cdot m$ , und daher auf Grund der obigen Rechnung  $(2m - x)^T A(2m - x) + b^T(2m - x) + c = 0$ , also auch  $2m - x \in Q$ , d.h.  $m$  muss ein Mittelpunkt von  $Q$  sein.

Damit haben wir folgenden Satz bewiesen:

**Satz 3.191** *Sei  $Q$  eine nicht in einer Hyperebene enthaltene Quadrik mit Gleichung  $x^T Ax + b^T x + c = 0$ . Die Menge der Mittelpunkte von  $Q$  ist dann die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems  $2Ax = -b$ .*

Die Mittelpunkte bilden also einen affinen Teilraum.

*Beispiel:*

Sei  $Q$  die Quadrik mit Gleichung  $x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$  im  $\mathbb{R}^3$ , also ein hyperbolischer Zylinder. Das Gleichungssystem für die Mittelpunkte lautet hier:

$$2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Menge der Mittelpunkte ist hier also die Gerade  $\{(0, 0, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\}$ . In diesem Fall (und analog beim elliptischen Zylinder) heißt diese Gerade die *Achse* des Zylinders.

Sehen wir uns allgemeiner eine beliebige nicht in einer Hyperebene enthaltene Quadrik  $Q$  im  $\mathbb{R}^d$  an, deren Gleichung Normalform hat, und betrachten wir die drei Typen.

### Typ (1):

Hier lautet die  $i$ -te Zeile des Gleichungssystems  $2Ax = -b$ :

$$\begin{aligned} 2x_i &= 0 & \text{für } 1 \leq i \leq p, \\ -2x_i &= 0 & \text{für } p < i \leq r, \\ 0x_i &= 0 & \text{für } r < i \leq d. \end{aligned}$$

Die Mittelpunktsmenge ist also  $M = \{x \in \mathbb{R}^d : x_i = 0 \text{ für } 1 \leq i \leq r\}$ . Das ist die lineare Hülle von  $\{e_{r+1}, \dots, e_d\}$ , also ein  $(d-r)$ -dimensionaler affiner Teilraum des  $\mathbb{R}^d$ . Jeder Mittelpunkt erfüllt offensichtlich die Gleichung von  $Q$ , also ist  $M$  in  $Q$  enthalten. Im Falle eines Kegels im  $\mathbb{R}^3$  gibt es nur einen Mittelpunkt, nämlich die Spitze des Kegels.

### Typ (2):

Hier sieht das Gleichungssystem  $2Ax = -b$  genauso wie bei Typ (1) aus, es ergibt sich also dieselbe Mittelpunktsmenge. Der Unterschied besteht nur darin, dass in diesem Fall keiner der Mittelpunkte auf der Quadrik liegt. (Vgl. etwa obiges Beispiel mit dem Zylinder.)

### Typ (3):

Hier lautet die  $(r+1)$ -te Zeile des Gleichungssystems  $2Ax = -b$ :

$$0x_{r+1} = -1$$

Das ist ein Widerspruch, und daher besitzen (nicht in einer Hyperebene enthaltene) Quadriken dieses Typs keinen Mittelpunkt.

# Kapitel 4

## Euklidische Geometrie

Unter "Euklidischer Geometrie" versteht man heute im Sinne von Felix Klein die Geometrie der Bewegungs-Invarianten. Dazu gehören vor allem Länge, Fläche, Volumen und die entsprechenden höherdimensionalen Analoga. Wir besprechen daher zunächst eingehend diese Begriffe und einige damit zusammenhängende Probleme. Die Invarianz wird erst später, im Abschnitt 4.2 über Isometrien, behandelt.

### 4.1 Längen-, Flächen- und Volumsmessung

#### 4.1.1 Längenmessung

Die Messung der Länge einer Strecke stellt im euklidischen bzw. Hilbert'schen Axiomensystem ein besonderes Problem dar, das mit der Definition der reellen Zahlen zusammenhängt, wie schon in Kapitel 2.4 kurz erklärt wurde. Wenn man jedoch vom  $\mathbb{R}^d$  ausgeht, ist die Sache ganz einfach.

Die Länge einer Strecke im  $\mathbb{R}^2$  ergibt sich in natürlicher Weise aus dem Pythagoräischen Lehrsatz: Seien  $a = (a_1, a_2)$  und  $b = (b_1, b_2)$  die beiden Endpunkte der Strecke. Dann betrachtet man das rechtwinkelige Dreieck mit den Ecken  $a$ ,  $b$  und  $(b_1, a_2)$ . Die Katheten dieses Dreiecks haben die Längen  $|a_1 - b_1|$  und  $|a_2 - b_2|$ . Die Hypotenuse ist die betrachtete Strecke und hat daher die Länge  $\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$ .

Das führt zu folgender Definition der Länge einer Strecke im  $\mathbb{R}^d$  im Rahmen unseres Axiomensystems:

**Definition 4.1** Seien  $a$  und  $b$  die Endpunkte einer Strecke im  $\mathbb{R}^d$ . Dann versteht man unter der **Länge** dieser Strecke die Zahl

$$\delta(a, b) := \sqrt{\sum_{i=1}^d (a_i - b_i)^2}.$$

Diese Zahl nennt man auch den **Abstand** der Punkte  $a$  und  $b$  (genauer den **euklidischen Abstand**).

Meistens bezeichnet man diesen Abstand mit  $d(a, b)$ . Da wir jedoch die Dimension des Raumes mit  $d$  bezeichnen, schreiben wir hier stattdessen  $\delta$ .

In naheliegender Weise definiert man die Länge eines Vektors  $x = \vec{ab}$  so, dass sie mit der Länge der Strecke  $\overline{ab}$  übereinstimmt:

**Definition 4.2** Unter der **Länge** oder **Norm** eines Vektors  $x \in \mathbb{R}^d$  versteht man die Zahl

$$\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^d x_i^2}.$$

Wir sehen also:

$$\delta(a, b) = \|a - b\| = \|b - a\| = \|\vec{ab}\|.$$

Die so definierte Funktion  $\delta : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  hat folgende Eigenschaften (siehe Lineare Algebra):

1.  $\delta(a, b) \geq 0$ ,
2.  $\delta(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$ ,
3.  $\delta(b, a) = \delta(a, b)$  (Symmetrie),
4.  $\delta(a, c) \leq \delta(a, b) + \delta(b, c)$  (Dreiecksungleichung).

**Definition 4.3** Sei  $M$  eine beliebige Menge. Wenn  $\delta : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  irgend eine Funktion mit den obigen vier Eigenschaften ist, so nennt man  $\delta$  eine **Metrik** auf der Menge  $M$ .

Durch den euklidischen Abstand wird also eine Metrik auf dem  $\mathbb{R}^d$  definiert. Es gibt aber auch andere sinnvolle Metriken auf dem  $\mathbb{R}^d$ , z.B. die folgenden beiden:

$$\delta_1(a, b) := \sum_{i=1}^d |a_i - b_i|$$

und

$$\delta_\infty(a, b) := \max_{1 \leq i \leq d} |a_i - b_i|.$$

Der Nachweis der vier Metrik-Eigenschaften ist hier eine einfache Übungsaufgabe.

Will man den euklidischen Abstand deutlich von anderen Metriken unterscheiden, so bezeichnet man ihn mit  $\delta_2$  an Stelle von  $\delta$ .

Wenn  $\delta$  eine Metrik auf dem  $\mathbb{R}^d$  und  $M$  eine beliebige Teilmenge des  $\mathbb{R}^d$  ist, so ergibt natürlich die Einschränkung von  $\delta$  auf  $M \times M$  eine Metrik auf  $M$ . Das gilt insbesondere für den Fall, dass  $M$  eine Sphäre ist.

### Länge von Kurven

Die Länge von Kurven kann man auf die von Streckenzügen zurückführen.

**Definition 4.4** Unter einem **Streckenzug** (oder **Polygonzug**) im  $\mathbb{R}^d$  versteht man eine Menge von Strecken der Form  $P = \{[p_0, p_1], [p_1, p_2], \dots, [p_{n-1}, p_n]\}$  mit  $p_i \in \mathbb{R}^d$ . Unter der **Länge** von  $P$  versteht man einfach die Summe der Längen der einzelnen Strecken:

$$L(P) := \sum_{i=1}^n \delta(p_{i-1}, p_i).$$

Bezeichnung:  $P = \overline{p_0, \dots, p_n}$ .

Ein Streckenzug kann natürlich auch einfach durch eine Folge  $(p_0, \dots, p_n)$  von Punkten definiert werden, wobei zu beachten ist, dass die umgekehrten Folge  $(p_n, p_{n-1}, \dots, p_1, p_0)$  denselben Streckenzug bestimmt.

Wenn  $p_n = p_0$  ist, nennen wir den Streckenzug *geschlossen* (vgl. Bemerkung nach Definition 4.16).

Der Begriff "Kurve" wird in der Analysis üblicherweise so definiert:

**Definition 4.5** Unter einer **parametrisierten Kurve** im  $\mathbb{R}^d$  versteht man eine stetige Abbildung

$$c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d,$$

wobei  $a$  und  $b$  reelle Zahlen mit  $a < b$  sind.

Eine parametrisierte Kurve  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$  kann nicht einfach mit der Bildmenge  $c([a, b])$  identifiziert werden. Sie beschreibt ja auch, in welcher Weise diese Bildmenge "durchlaufen" wird. Die Länge einer Kurve will man aber natürlich so definieren, dass sie nicht etwa von der Richtung und der Geschwindigkeit des Durchlaufens abhängt. Man führt daher auf der Menge aller parametrisierten Kurven folgenderweise eine Äquivalenzrelation ein:

**Definition 4.6** Zwei parametrisierte Kurven  $c_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^d$  und  $c_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^d$  heißen **äquivalent**, wenn es eine streng monoton wachsende stetige Abbildung  $\varphi : [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$  gibt, sodass

$$c_2(t) = c_1(\varphi^{-1}(t)) \text{ für alle } t \in [a_2, b_2].$$

Wir könnten natürlich genauso gut schreiben:  $c_2(\varphi(t)) = c_1(t)$  für alle  $t \in [a_1, b_1]$ .

Es ist leicht zu sehen, dass das tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist.

**Definition 4.7** Unter einer **Kurve** im  $\mathbb{R}^d$  versteht man eine Äquivalenzklasse bezüglich der soeben definierten Äquivalenzrelation. Jedes Element dieser Äquivalenzklasse heißt dann **Parameterdarstellung** der betrachteten Kurve.

Die folgenderweise definierte Länge einer Kurve ist nun unabhängig von der gewählten Parameterdarstellung, wie man unschwer einsehen kann:

**Definition 4.8** Unter einer **Zerlegung** des Intervalls  $[a, b]$  versteht man ein  $(n+1)$ -Tupel  $(t_0, \dots, t_n)$  von reellen Zahlen mit  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ , wobei  $n$  eine beliebige natürliche Zahl ist.

**Definition 4.9** Sei  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$  die Parameterdarstellung einer Kurve  $\tilde{c}$ . Dann versteht man unter der **Länge**  $L(\tilde{c})$  dieser Kurve das Supremum der Längen aller Streckenzüge

$$\overline{c(t_0), c(t_1), \dots, c(t_n)},$$

über alle Zerlegungen  $(t_0, \dots, t_n)$  von  $[a, b]$ .

Die so definierte Länge kann unendlich sein. Wenn sie endlich ist, nennt man die Kurve **rektifizierbar**.

**Satz 4.10** *Sei  $\tilde{c}$  eine Kurve mit einer stetig differenzierbaren Parameterdarstellung  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Dann ist  $\tilde{c}$  rektifizierbar, und es gilt*

$$L(\tilde{c}) = \int_a^b \|c'(t)\| dt.$$

Der hier auftretende Vektor  $c'(t) = (c'_1(t), \dots, c'_d(t))$  heißt auch *Geschwindigkeitsvektor* (zum Parameterwert  $t$ ) und wird oft mit  $\dot{c}(t)$  bezeichnet. Das Produkt  $\|c'(t)\| dt$  kann man sich anschaulich als "Geschwindigkeit mal (infinitesimal kleine) Zeit" vorstellen; das ist gewissermaßen die in der Zeit  $dt$  zurückgelegte Wegstrecke. Das Integral entspricht dann der Summe aller dieser Wegstrecken, und das ist die Länge der Kurve.

Man kann nun zeigen, dass man die Länge einer Kurve in folgendem Sinn näherungsweise berechnen kann, indem man sie durch einen Streckenzug approximiert:

**Definition 4.11** *Unter der **Feinheit** einer Zerlegung  $Z = (t_0, \dots, t_n)$  von  $[a, b]$  versteht man die Zahl*

$$\eta(Z) := \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1}).$$

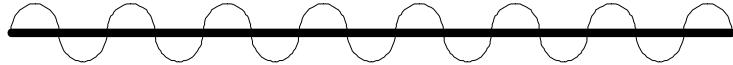
**Definition 4.12** *Sei  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$  eine parametrisierte Kurve und  $Z = (t_0, \dots, t_n)$  eine Zerlegung von  $[a, b]$ . Dann heißt  $\overline{c(t_0), c(t_1), \dots, c(t_n)}$  der zugehörige der Kurve **einbeschriebene Streckenzug**.*

**Satz 4.13** *Sei  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$  eine parametrisierte Kurve, und  $(Z_n)$  eine Folge von Zerlegungen von  $[a, b]$  mit  $\eta(Z_n) \rightarrow 0$ . Dann konvergiert die Länge der zugehörigen der Kurve  $\tilde{c}$  einbeschriebenen Streckenzüge gegen die Länge von  $\tilde{c}$ .*

Dieser Satz klingt sehr plausibel und ist auch relativ leicht zu beweisen. Die folgenden Bemerkungen zeigen jedoch an Hand ähnlicher Situationen, dass es sich keineswegs um eine Selbstverständlichkeit handelt.

1. Wir könnten auch versuchen, die Länge einer Kurve durch einen approximierenden Kreisbogenzug zu berechnen. Ein *Kreisbogenzug* ist eine Menge

von Kreisbögen  $\{K_1, \dots, K_n\}$ , sodass der Endpunkt des  $(i-1)$ -ten Kreisbogens mit dem Anfangspunkt des  $i$ -ten Kreisbogens übereinstimmt, und in diesem Punkt die beiden Kreisbögen eine gemeinsame Tangente haben. Approximiert man z.B. eine Strecke der Länge 1 durch einen aus Halbkreisen bestehenden Kreisbogenzug wie in der folgenden Abbildung, so sieht man, dass die Länge des Kreisbogenzugs für beliebige  $n$  gleich  $\pi/2$  ist, also nicht gegen die Länge der Strecke konvergiert.



(Die Länge jedes Halbkreises ist gleich  $\pi \frac{1}{2n}$ .)

2. Wenn man versucht, den Flächeninhalt einer gekrümmten Fläche in analoger Weise durch einbeschriebene (im Allgemeinen nicht konvexe) Polyeder zu bestimmen, so treten Schwierigkeiten auf, die an folgendem Beispiel deutlich werden:

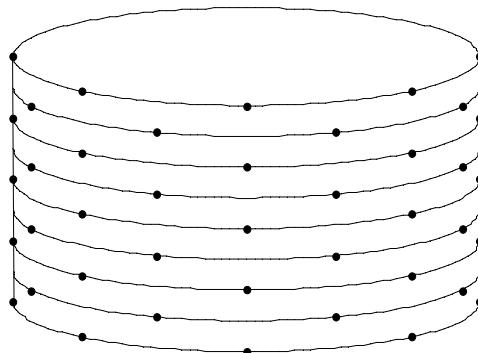
Sei  $F := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1 \text{ und } 0 \leq x_3 \leq 1\}$ . Das ist der "Mantel" eines Zylinders mit Radius 1 und Höhe 1.

Aus der Schule wissen wir, dass der Inhalt der Fläche  $F$  gleich dem Umfang des Basiskreises mal der Höhe ist, das ergibt  $2\pi$ .

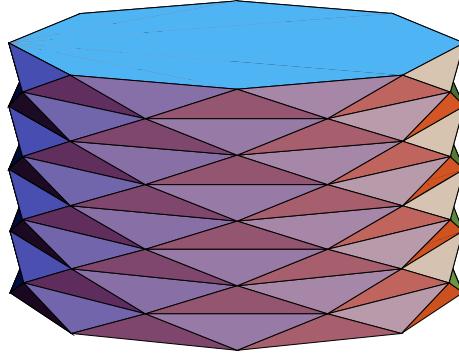
Wir approximieren nun die Fläche  $F$  durch eine aus vielen Dreiecken bestehende Polyederfläche in folgender Weise: Wir denken uns auf dem Zylinder  $n+1$  Kreise

$$K_i := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1 \text{ und } x_3 = \frac{i}{n}\}, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

wobei  $n$  eine gerade Zahl sei. Auf jedem Kreis  $K_i$  wählen wir  $m$  äquidistante Punkte  $p_{i1}, \dots, p_{im}$ , und zwar so, dass die Punkte auf den Kreisen mit geradem Index  $i$  genau übereinander liegen, dagegen die auf den Kreisen mit ungeradem Index jeweils dazwischen, so wie es die Abbildung zeigt.



Bilden wir nun Dreiecke, indem wir diese Punkte in naheliegender Weise verbinden (siehe 2. Abbildung), so erhalten wir eine polyedrische Fläche, die aus  $2nm$  kongruenten gleichschenkeligen Dreiecken besteht.



Die Grundlinie jedes Dreiecks hat die Länge  $a = 2 \sin \frac{\pi}{m}$ . Die Höhe  $h$  können wir so berechnen:  $h^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 + (1 - \cos \frac{\pi}{m})^2$ . Daher ist der Flächeninhalt jedes Dreiecks gleich

$$\Delta = \frac{a}{2} h = \sin \frac{\pi}{m} \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(1 - \cos \frac{\pi}{m}\right)^2}$$

und der Inhalt der gesamten Polyederfläche ist gleich  $2nm\Delta$ .

Wählen wir  $n = m$ , so erhalten wir als Grenzwert (wegen  $\sin \frac{\pi}{m} \cong \frac{\pi}{m}$  und  $\cos \frac{\pi}{m} \cong 1 - \frac{\pi^2}{2m^2}$ ):

$$\lim_{m \rightarrow \infty} 2m^2\Delta = \lim_{m \rightarrow \infty} 2m\pi \sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{\pi^4}{4m^4}} = \lim_{m \rightarrow \infty} 2\pi \sqrt{1 + \frac{\pi^4}{4m^2}} = 2\pi,$$

was wir natürlich erwartet haben.

Wählen wir dagegen  $n = m^2$ , so ergibt sich

$$\lim_{m \rightarrow \infty} 2m^3\Delta = \lim_{m \rightarrow \infty} 2m^2\pi \sqrt{\frac{1}{m^4} + \frac{\pi^4}{4m^4}} = 2\pi \sqrt{1 + \frac{\pi^4}{4}} > 2\pi.$$

Für  $n = m^3$  erhalten wir sogar

$$\lim_{m \rightarrow \infty} 2m^4\Delta = \lim_{m \rightarrow \infty} 2m^3\pi \sqrt{\frac{1}{m^6} + \frac{\pi^4}{4m^4}} = \lim_{m \rightarrow \infty} 2\pi \sqrt{1 + \frac{\pi^4}{4}m^2} = \infty.$$

(Dieses Beispiel geht auf den unter anderem durch die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung bekannten Mathematiker *Hermann Schwarz* (1843 - 1921) zurück.)

### 4.1.2 Flächenmessung im $\mathbb{R}^2$

Den Flächeninhalt  $f(M)$  einer Teilmenge  $M$  des  $\mathbb{R}^2$  wird in der Integralrechnung folgenderweise definiert:

$$f(M) = \int_M 1 \, dx_1 \, dx_2,$$

soferne dieses Integral überhaupt existiert (siehe Vorlesungen oder Bücher über Analysis). Wenn die Menge  $M$  nicht durch wenige einfache Kurven begrenzt ist, ist die Auswertung dieses Integrals unter Umständen sehr schwierig und erfordert den Einsatz von aufwendigen Approximationsverfahren.

Bei der Bearbeitung von geometrischen Daten mit dem Computer sind die Mengen oft näherungsweise durch (im Allgemeinen nicht konvexe) Polygone gegeben. Diese Polygone können allerdings sehr viele Ecken haben, und daher ist vielleicht auch nicht sofort klar, wie man den Flächeninhalt ausrechnet. Wir werden aber sehen, dass es dafür doch eine relativ einfache Formel gibt (siehe Satz 4.18).

Bei der Approximation einer ebenen Fläche durch Polygone können nicht solche Probleme auftreten, wie wir sie oben beim Beispiel von Hermann Schwarz kennengelernt haben. Die entsprechende Theorie kann allerdings hier nicht behandelt werden, es sei daher auf Vorlesungen oder Bücher über Maß- und Integrationstheorie verwiesen.

### Orientierte Polygone

Den Flächeninhalt eines beliebigen (ebenen) Polygons könnte man in natürlicher Weise durch Zerlegung des Polygons in Dreiecke definieren. Dabei entsteht allerdings das Problem, dass nicht von vornherein klar ist, ob sich bei verschiedenen Zerlegungen ein und desselben Polygons immer derselbe Flächeninhalt ergibt. Um diese Schwierigkeit zu vermeiden, gehen wir hier anders vor. Unsere Definition hat außerdem den Vorteil, dass sie wesentlich leichter durch ein Computerprogramm realisiert werden kann und sich ohne weiteres auf höhere Dimensionen verallgemeinern lässt.

Der Grundgedanke besteht darin, dass wir das betrachtete Polygon als "Summe" von "positiven" und "negativen" Dreiecke auffassen, die alle den Ursprung als eine Ecke haben. Um das zu präzisieren, benötigen wir den folgenden Begriff:

**Definition 4.14** Unter einem **orientierten (ebenen) Polygon** verstehen wir eine endliche Folge  $(p_1, \dots, p_n)$  von Punkten des  $\mathbb{R}^2$ , wobei zwei solche Punktfolgen als gleich angesehen werden, wenn sie sich nur durch eine zyklische Vertauschung unterscheiden. Die Punkte  $p_i$  heißen **Ecken** oder **Eckpunkte**, und man setzt  $p_{n+1} := p_1$ .

Für  $n = 3$  sprechen wir von einem **orientierten Dreieck**.

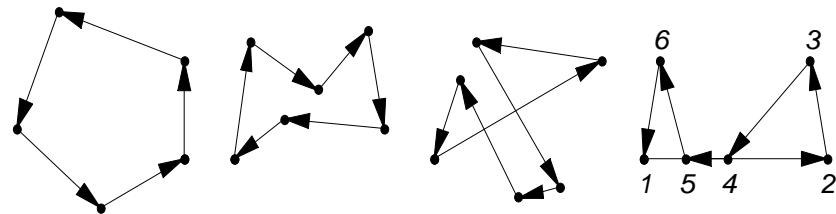
Die hier auftretenden Folgen nennt man auch *zyklische Folgen*. Genau genommen handelt es sich um Äquivalenzklassen von  $n$ -Tupeln.

**Definition 4.15** Unter den **Kanten** eines orientierten Polygons  $(p_1, \dots, p_n)$  verstehen wir die geordneten Paare  $(p_i, p_{i+1})$  von aufeinanderfolgenden Ecken (für  $i \in \{1, \dots, n\}$ ).

Insbesondere ist also auch  $(p_n, p_1)$  ein Kante von  $(p_1, \dots, p_n)$ . Die Kanten eines orientierten Dreiecks  $(a, b, c)$  sind somit  $(a, b)$ ,  $(b, c)$  und  $(c, a)$ .

Bemerkungen dazu:

1. Ein orientiertes Polygon kann einspringende Ecken haben, und es können Kantenüberschneidungen auftreten. Es ist sogar zugelassen, dass sich die Kanten (ganz oder teilweise) gegenseitig überdecken oder dass Ecken zusammenfallen. (Siehe Abbildung.)



2. Wie schon vorhin bemerkt wurde, betrachten wir auf der Menge aller endlichen Punktfolgen im  $\mathbb{R}^2$  eigentlich eine Äquivalenzrelation, definiert durch zyklische Vertauschung. Ein orientiertes Polygon ist dann eine entsprechende Äquivalenzklasse. Zu einer gegebenen Menge von  $n$  Ecken gibt es  $n$  zyklische Vertauschungen und daher  $\frac{n!}{n} = (n-1)!$  verschiedene orientierte Polygone.

3. Den Zusatz  $p_{n+1} := p_1$  könnten wir weglassen, wenn wir sagen: Die Indizes der Eckpunkte sind modulo  $n$  zu verstehen.

4. Die Menge der Ecken von  $P = (p_1, \dots, p_n)$  bezeichnen wir mit  $\text{vert } P$ , d.h. also:

$$\text{vert}(p_1, \dots, p_n) = \{p_1, \dots, p_n\}.$$

**Definition 4.16** Sei  $P = (p_1, \dots, p_n)$  ein orientiertes Polygon. Dann heißt

$$\bar{P} := \{[p_1, p_2], \dots, [p_{n-1}, p_n], [p_n, p_1]\}$$

das zugehörige (**nicht-orientierte**) **Polygon**. Die Menge

$$|P| = [p_1, p_2] \cup \dots \cup [p_{n-1}, p_n] \cup [p_n, p_1]$$

heißt die **Trägermenge** von  $P$  bzw.  $\bar{P}$ .

Bemerkungen dazu:

- a) Die den Kanten  $(p_i, p_{i+1})$  entsprechenden Strecken  $[p_i, p_{i+1}]$  werden auch *Kanten von  $\bar{P}$*  genannt.
- b) Nicht-orientierte Polygone heißen auch *geschlossene Streckenzüge* (vgl. Definition 4.4).
- c) Oft wird auch die Trägermenge eines (nicht-orientierten) Polygons als Polygon bezeichnet. Es ist jedoch zu beachten, dass verschiedene nicht-orientierte Polygone dieselbe Trägermenge haben können. Das tritt z.B. auf, wenn man eine Kante durch Einfügung einer zusätzlichen Ecke in zwei Kanten zerteilt.
- d) Der Begriff "orientiertes Polygon" hängt folgenderweise mit den konvexen Polygonen von Kapitel 3.4.6 zusammen: Wenn  $P'$  ein konvexes Polygon ist, so können wir die Ecken von  $P'$  so nummerieren, dass jeweils zwei aufeinanderfolgende Ecken eine Kante bilden und auf diese Weise alle Kanten von  $P'$  erfasst werden. Dabei ist die Nummerierung natürlich wieder modulo  $n$  zu verstehen, wenn  $n$  die Anzahl der Ecken bedeutet. Es gibt bis auf zyklische Vertauschung genau zwei verschiedene solche Nummerierungen, das heißt jedes konvexe Polygon kann auf zwei verschiedene Arten orientiert werden.

Wenn  $P'$  ein konvexes Polygon ist, dann ist also der *Rand* von  $P'$  ein zu einem orientierten Polygon  $P$  gehöriger geschlossener Streckenzug (genauer: dessen Trägermenge). Umgekehrt entspricht natürlich nicht jedes orientierte Polygon einem konvexen Polygon.

Wir erinnern uns nun daran, dass die Determinante von zwei Vektoren  $a$  und  $b$  des  $\mathbb{R}^2$  den Flächeninhalt des von  $a$  und  $b$  aufgespannten Parallelogramms

angibt, wobei das Vorzeichen positiv oder negativ sein kann. Es ist daher naheliegend, den Flächeninhalt eines orientierten Dreiecks folgendermaßen zu definieren:

$$f(p, q, r) := \frac{1}{2} \det(q - p, r - p).$$

Diese Definition ist invariant gegenüber zyklischen Vertauschungen der Eckpunkte. Da die Determinante eine alternierende Multilinearform ist, gilt ja:

$$\begin{aligned} 2f(p, q, r) &= \det(q - p, r - p) = \det(q, r - p) - \det(p, r - p) = \\ &= \det(q, r) - \det(q, p) - \det(p, r) + \det(p, p) = \\ &= \det(q, r) - \det(q, p) - \det(p, r), \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} 2f(q, r, p) &= \det(r - q, p - q) = \det(r, p - q) - \det(q, p - q) = \\ &= \det(r, p) - \det(r, q) - \det(q, p) + \det(q, q) = \\ &= \det(r, p) - \det(r, q) - \det(q, p) = -\det(p, r) + \det(q, r) - \det(q, p) = \\ &= 2f(p, q, r), \end{aligned}$$

und genauso sieht man, dass  $f(r, p, q) = f(p, q, r)$  ist.

Andererseits ändert  $f(p, q, r)$  bei Vertauschung zweier Ecken das Vorzeichen, wie ebenso leicht zu sehen ist.

*Bemerkung:*  $f(p, q, r)$  ist auch für den Fall sinnvoll definiert, dass die Punkte  $p, q, r$  nicht paarweise verschieden sind. In diesem Fall ergibt sich die Zahl Null.

Ausgehend von der eingangs beschriebenen Grundidee kommen wir nun zu folgender Definition:

**Definition 4.17** Unter dem (*signierten*) **Flächeninhalt eines orientierten Polygons**  $(p_1, \dots, p_n)$  verstehen wir

$$f(p_1, \dots, p_n) := \sum_{i=1}^n f(s, p_i, p_{i+1}),$$

wobei  $s$  ein beliebiger Punkt des  $\mathbb{R}^2$  ist.

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl des Punktes  $s$ . Es gilt nämlich:

**Satz 4.18**

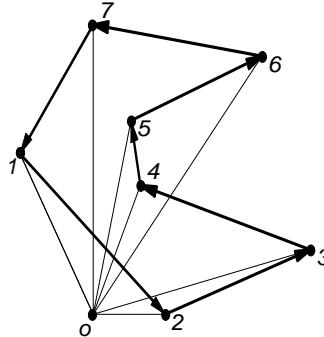
$$f(p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^n f(o, p_i, p_{i+1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \det(p_i, p_{i+1}).$$

*Beweis:*

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^n f(s, p_i, p_{i+1}) &= \sum_{i=1}^n \det(p_i - s, p_{i+1} - s) = \\ &= \sum_{i=1}^n (\det(p_i, p_{i+1}) - \det(s, p_{i+1}) - \det(p_i, s) + \det(s, s)) = \\ &= \sum_{i=1}^n \det(p_i, p_{i+1}) + \sum_{i=1}^n (\det(p_{i+1}, s) - \det(p_i, s)). \end{aligned}$$

Die zweite Summe ist hier offensichtlich gleich Null, und daraus folgt die Behauptung.  $\square$

In der folgenden Abbildung sind  $\det(p_1, p_2)$  und  $\det(p_5, p_6)$  negativ, die anderen Determinanten sind positiv, und der gesamte Flächeninhalt ist ebenfalls positiv.



$f$  ist offensichtlich invariant gegenüber zyklischen Vertauschungen der  $p_i$ , und daher wird auf diese Weise wirklich jedem orientierten Polygon in eindeutiger Weise eine (positive oder negative) Zahl zugeordnet.

*Beispiele:*

1. Als erstes Beispiel betrachten wir das Einheitsquadrat. Wenn unsere Definitionen sinnvoll sind, dann muss sich natürlich als Flächeninhalt 1 ergeben.

Hier verstehen wir unter dem orientierten Einheitsquadrat die Folge  $P_4 := ((0,0), (1,0), (1,1), (0,1))$ , und wir erhalten:

$$\begin{aligned} f(Q) &= \frac{1}{2} \left( \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right) = \\ &= \frac{1}{2} (0 + 1 + 1 + 0) = 1. \end{aligned}$$

2. Sei  $R_n$  das folgende (orientierte) *reguläre n-Eck* (für  $n \geq 3$ ):

$$R_n := (p_1, \dots, p_n) \text{ mit } p_k := \left( \cos \frac{2k\pi}{n}, \sin \frac{2k\pi}{n} \right).$$

(Das ist also ein reguläres  $n$ -Eck mit Mittelpunkt  $o$  und Umkreisradius 1.)

Hier ist

$$\begin{aligned} f(R_n) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} \cos \frac{2k\pi}{n} & \sin \frac{2k\pi}{n} \\ \cos \frac{2(k+1)\pi}{n} & \sin \frac{2(k+1)\pi}{n} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( \sin \frac{2(k+1)\pi}{n} \cos \frac{2k\pi}{n} - \cos \frac{2(k+1)\pi}{n} \sin \frac{2k\pi}{n} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sin \left( \frac{2(k+1)\pi}{n} - \frac{2k\pi}{n} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sin \frac{2\pi}{n} = \frac{n}{2} \sin \frac{2\pi}{n} = n \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n}. \end{aligned}$$

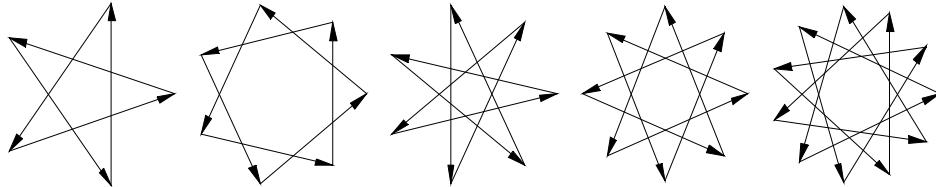
Das ist also der  $n$ -fache Flächeninhalt eines Dreiecks, das von einer Kante und dem Mittelpunkt aufgespannt wird.

3. Etwas weniger bekannt sind die folgenderweise definierten *regulären Sternpolygone*:

Seien  $n, m$  zwei teilerfremde (d.h. relativ prime) natürliche Zahlen mit  $1 < m < n/2$  und daher  $n \geq 5$ . Dann setzen wir

$$R_{n,m} := (p_1, \dots, p_n) \text{ mit } p_k := \left( \cos \frac{2mk\pi}{n}, \sin \frac{2mk\pi}{n} \right).$$

Die folgende Abbildung zeigt die regulären Sternpolygone  $R_{5,2}$ ,  $R_{7,2}$ ,  $R_{7,3}$ ,  $R_{8,3}$ ,  $R_{11,4}$ :



Die Teilerfremdheit von  $m$  und  $n$  garantiert uns, dass die Punkte  $p_k$  alle paarweise verschieden sind: Angenommen,  $p_{k'} = p_k$  mit  $1 \leq k < k' \leq n$ . Dann wäre  $mk' \equiv mk \pmod{n}$ , d.h.  $m(k' - k) = tn$  für ein  $t \in \mathbb{Z}$ .

Wegen  $1 \leq k' - k < n$  hieße das: Das kleinste gemeinsame Vielfache von  $m$  und  $n$  ist kleiner als  $mn$ , im Widerspruch zur Teilerfremdheit von  $m$  und  $n$ .

Für den Flächeninhalt eines solchen Sternpolygons erhalten wir nun, ähnlich wie vorhin:

$$f(R_{n,m}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( \sin \frac{2m(k+1)\pi}{n} \cos \frac{2mk\pi}{n} - \cos \frac{2m(k+1)\pi}{n} \sin \frac{2mk\pi}{n} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sin \left( \frac{2m(k+1)\pi}{n} - \frac{2mk\pi}{n} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sin \frac{2m\pi}{n} = \frac{n}{2} \sin \frac{2m\pi}{n}.
\end{aligned}$$

Das ist also wieder der  $n$ -fache Flächeninhalt eines Dreiecks, das von einer Kante und dem Mittelpunkt aufgespannt wird. Im Gegensatz zum regulären  $n$ -Eck überlappen sich hier aber diese Dreiecke gegenseitig.

### Einfache Polygone

Wir wollen nun den hier definierten Flächeninhalts-Begriff insbesondere für den Fall diskutieren, dass es sich um Polygone handelt, die sich nicht selbst überschneiden.

**Definition 4.19** Eine orientiertes Polygon  $(p_1, \dots, p_n)$  heißt **einfach**, wenn für je zwei verschiedene Kanten  $(p_i, p_{i+1})$  und  $(p_k, p_{k+1})$  gilt

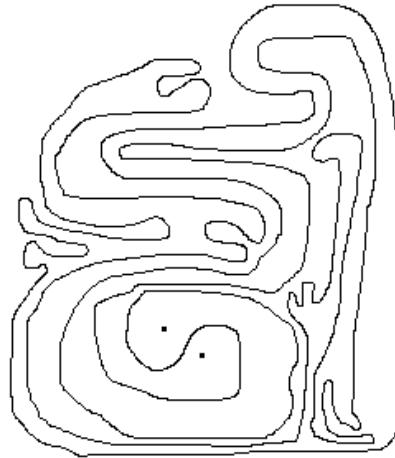
$$[p_i, p_{i+1}] \cap [p_k, p_{k+1}] = \begin{cases} \{p_k\} & \text{für } k \equiv i+1 \pmod{n}, \\ \{p_i\} & \text{für } i \equiv k+1 \pmod{n}, \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ein orientiertes Polygon heißt also einfach, wenn der zugehörige geschlossene Streckenzug *keine Selbstüberschneidungen* aufweist. Das zugehörige nicht-orientierte Polygon nennen wir dann ebenfalls *einfach*.

Einfache (orientierte) Polygone stellen eigentlich einen Spezialfall der "Jordan-Kurven" dar, das sind geschlossene Kurven in der Ebene ohne Selbstüberschneidungen (kurz *einfach geschlossene Kurven*).

Ein einfaches Polygon umschließt immer ein eindeutig bestimmtes Gebiet der Ebene. Diese einleuchtende Tatsache ist in Wirklichkeit gar nicht so

ganz trivial, wie vielleicht an folgendem Beispiel deutlich wird:



Diese Zeichnung soll ein einfaches Polygon mit sehr vielen (sagen wir 100000) Ecken und sehr kurzen Kanten darstellen. Welcher der beiden eingezeichneten Punkte wird von dem Polygon umschlossen und welcher nicht? Wie könnte ein Computerprogramm so etwas entscheiden?

**Satz 4.20** *Sei  $P = (p_1, \dots, p_n)$  ein einfaches (orientiertes) Polygon. Dann ist*

$$\mathbb{R}^2 \setminus |P| = A \cup B,$$

*wobei  $A$  und  $B$  zwei disjunkte zusammenhängende Teilmengen des  $\mathbb{R}^2$  sind, von denen genau eine, sagen wir  $A$ , beschränkt ist.*

*Camille Jordan* (1838-1922) ist vor allem durch den *"Jordan'schen Kurvensatz"* bekannt, das ist die (wesentlich schwieriger zu beweisende) Verallgemeinerung dieses Satzes auf Jordan-Kurven.

**Definition 4.21** *Mit den Bezeichnungen des obigen Satzes heißt  $A$  das **Innengebiet** und  $B$  das **Außengebiet** von  $P$  bzw.  $|P|$ .*

*Bezeichnung:*  $A = \text{Int } P$ ,  $B = \text{Ext } P$ .

*Bemerkung:* Innen- und Außengebiet eines einfachen orientierten Polygons sind stets offene Mengen. Beziiglich der Beziehung zum topologischen Begriff "innere Punkte" siehe die Bemerkung nach Definition 4.24.

Der hier auftretende Begriff "zusammenhängend" kann übrigens folgenderweise definiert werden:

**Definition 4.22** Eine Teilmenge  $A$  des  $\mathbb{R}^d$  heißt **zusammenhängend** (genauer: *polygonal zusammenhängend*), wenn es zu je zwei Punkten  $x$  und  $y$  von  $A$  eine Folge von Punkten  $(p_1, \dots, p_n)$  gibt, sodass  $x = p_1$ ,  $y = p_n$  und  $[p_i, p_{i+1}] \subset A$  für alle  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ .

Das bedeutet also, dass man je zwei Punkte von  $A$  durch einen Streckenzug verbinden kann, der vollständig innerhalb von  $A$  verläuft.

(In der Topologie werden mehrere Zusammenhangsbegriffe unterschieden, das spielt hier aber keine Rolle.)

*Zum Beweis von Satz 4.20:*

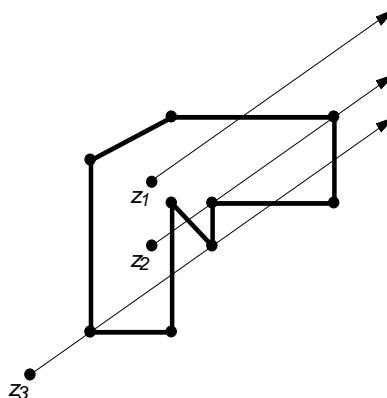
Wir diskutieren hier nur einen Aspekt des Beweises, der gleichzeitig eine Methode liefert, wie man mit einem Computer feststellen kann, ob ein Punkt innerhalb oder ausserhalb eines einfachen Polygons liegt.

Sei  $v$  ein Vektor  $\neq o$ , der zu keiner Kante von  $P$  parallel ist. (So einen Vektor gibt es sicher, da  $P$  ja nur endlich viele Kanten hat und es unendlich viele verschiedene Richtungen gibt.) Dann betrachten wir für jeden Punkt  $z$  aus  $\mathbb{R}^2 \setminus |P|$  die von  $z$  ausgehende Halbgerade mit Richtung  $v$ :

$$h(z) := \{x \in \mathbb{R}^2 : \exists \lambda \geq 0 \text{ sodass } x = z + \lambda v\}.$$

Mit  $s(z)$  bezeichnen wir nun die Anzahl der Schnittpunkte von  $h(z)$  mit  $|P|$ . Dabei zählen wir einen Eckpunkt  $p_i$  nur dann als Schnittpunkt, wenn die beiden benachbarten Eckpunkte  $p_{i-1}$  und  $p_{i+1}$  auf verschiedenen Seiten der Halbgeraden liegen, d.h. wenn

$$\text{sign}((p_{i+1} - p_i) \cdot v) \neq \text{sign}((p_{i-1} - p_i) \cdot v).$$



(In der Abbildung ist  $s(z_1) = 1$ ,  $s(z_2) = 3$ ,  $s(z_3) = 4$ .)

Wir definieren nun

$$\begin{aligned} A &:= \{z \in \mathbb{R}^2 \setminus |P| : s(z) \text{ ungerade}\}, \\ B &:= \{z \in \mathbb{R}^2 \setminus |P| : s(z) \text{ gerade}\}. \end{aligned}$$

Klarerweise sind  $A$  und  $B$  disjunkt. Man sieht auch sofort, dass  $B$  unbeschränkt ist: Es gibt sicher Geraden, welche  $|P|$  nicht schneiden; und für jeden Punkt  $z$  auf so einer Geraden ist  $s(z) = 0$ , also gerade, und das heißt dass diese Geraden ganz in  $B$  enthalten sind.

Man kann nun zeigen:  $A$  und  $B$  sind (polygonal) zusammenhängend, und  $A$  ist beschränkt. Ein Punkt  $z \in \mathbb{R}^2 \setminus |P|$  liegt also genau dann im Inneren von  $P$ , wenn  $s(z)$  ungerade ist, und das lässt sich auch mit einem Computer relativ leicht feststellen.

Eine etwas ausführlichere Beweisskizze findet man z.B. in [3].  $\square$

*Bemerkung:* Man kann zeigen, dass  $f(P) \neq 0$  für jedes einfache orientierte Polygon  $P$ .

**Definition 4.23** Sei  $P = (p_1, \dots, p_n)$  ein einfaches orientiertes Polygon. Wenn  $f(P) > 0$  ist, nennen wir  $P$  **positiv orientiert**, andernfalls **negativ orientiert**.

Klarerweise ändert sich die Orientierung eines einfachen orientierten Polygons, wenn man die Reihenfolge der Ecken umkehrt (da dann alle auftretenden Determinanten das Vorzeichen ändern). Anschaulich bedeutet positive Orientierung, dass die Ecken im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen werden.

Theoretisch könnte man die Begriffe "positiv orientiert" und "negativ orientiert" für beliebige orientierte Polygone mit signiertem Flächeninhalt  $\neq 0$  definieren. Da das aber keine natürliche anschauliche Bedeutung hat, verzichten wir darauf.

Kehren wir jetzt zu unserem ursprünglichen Thema zurück, der Bestimmung des Flächeninhalts von (einfach geschlossenen) Polygonen:

**Definition 4.24** Sei  $P = (p_1, \dots, p_n)$  ein einfaches (orientiertes) Polygon. Dann heißt

$$\text{cl}(\text{Int } P)$$

die zugehörige **Polygonfläche**.

*Bemerkungen* (ohne Beweis, aber anschaulich klar):

1.  $\text{cl}(\text{Int } P) = |P| \cup \text{Int } P$ .
2.  $\text{Int } P$  stimmt mit der Menge der inneren Punkte (im topologischen Sinne) von  $\text{cl}(\text{Int } P)$  überein. Wir könnten also schreiben:  $\text{Int } P = \text{int}(\text{cl}(\text{Int } P))$ .
3. Wenn es nur um den Flächeninhalt von Polygonen geht, ist es eigentlich egal, ob man das Innere oder die abgeschlossene Hülle betrachtet. Wir nehmen hier die abgeschlossene Hülle, damit die Vereinigung von zwei Polygonflächen, die genau eine Kante gemeinsam haben, wieder eine Polygonfläche ist.

**Definition 4.25** Sei  $A = \text{cl}(\text{Int}(p_1, \dots, p_n))$  eine Polygonfläche. Dann nennen wir

$$\mu(A) := |f(p_1, \dots, p_n)|$$

den **Flächeninhalt** (engl. *area*) oder kurz **Inhalt** von  $A$ . (Dabei bedeutet  $f$  den signierten Flächeninhalt.)

Ein und dieselbe Polygonfläche kann auf verschiedene Weise durch ein einfaches orientiertes Polygon erzeugt werden. Zum Beispiel ändert sich die Polygonfläche nicht, wenn man auf einer Kante des Polygons eine zusätzliche Ecke einfügt. Man kann aber zeigen, dass sich dabei der gemäß obiger Definition berechnete Flächeninhalt nicht ändert.

Der Flächeninhalt einer Polygonfläche ist also immer  $\geq 0$ . Man kann sogar zeigen, dass er immer  $> 0$  ist.

Wir erweitern die Definition noch folgenderweise:

**Definition 4.26** Wenn  $S$  in der Vereinigung von endlich vielen Geraden enthalten ist, dann setzen wir

$$\mu(S) := 0.$$

Die Aussage des nächsten Satzes ist zwar anschaulich evident, erfordert aber dennoch einen Beweis.

**Satz 4.27** (Additivität von  $\mu$ ) Seien  $A$  und  $B$  zwei Polygonflächen, und  $\mu(A \cap B)$  sowie  $\mu(A \cup B)$  seien definiert. Dann gilt:

$$\mu(A \cap B) = 0 \implies \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

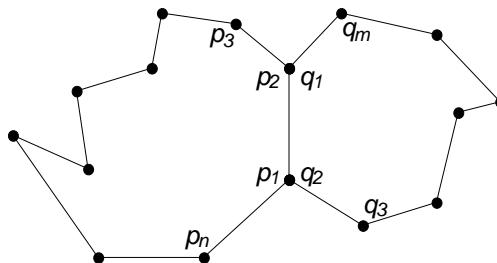
Zum Beweis:

Da ein vollständiger Beweis relativ umständlich ist, sehen wir uns hier nur den Spezialfall an, dass der Durchschnitt von  $A$  und  $B$  aus einer Kante besteht, die zu beiden Polygonen gehört (mit entgegengesetzter Orientierung). Wenn wir die Ränder von  $A$  und  $B$  positiv orientieren, so erhalten wir in diesem Fall zwei orientierte Polygone  $P = (p_1, \dots, p_n)$  und  $Q = (q_1, \dots, q_m)$ , sodass bei geeigneter Nummerierung der Ecken

$$(p_1, p_2) = (q_2, q_1).$$

Der Rand von  $A \cup B$  entspricht dann dem orientierten Polygon

$$(q_1 = p_2, p_3, \dots, p_n, p_1 = q_2, q_3, \dots, q_m).$$



Daher gilt (wegen  $\det(q_1, q_2) = -\det(q_2, q_1) = -\det(p_1, p_2)$ ):

$$\begin{aligned} \mu(A) + \mu(B) &= \det(p_1, p_2) + \sum_{i=2}^n \det(p_i, p_{i+1}) + \det(q_1, q_2) + \sum_{j=2}^m \det(q_j, q_{j+1}) = \\ &= \sum_{i=2}^n \det(p_i, p_{i+1}) + \sum_{j=2}^m \det(q_j, q_{j+1}) = \mu(A \cup B). \quad \square \end{aligned}$$

Aus diesem Satz folgt nun (mit vollständiger Induktion), dass bei Zerlegung einer Polygonfläche in Dreiecke ihr Inhalt gleich der Summe aller Dreiecksinhalte ist, und zwar unabhängig davon, wie man die Zerlegung durchführt.

Auch der nächste Satz ist anschaulich evident. Ein exakter Beweis ist zwar nicht wirklich schwierig, aber wieder relativ umständlich, sodass wir hier darauf verzichten. Die Beweisidee ist z.B. in [7] ganz gut beschrieben.

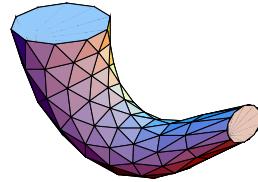
**Satz 4.28** (Monotonie von  $\mu$ ) *Seien  $A$  und  $B$  zwei Polygonflächen, und  $A \subset B$ . Dann ist  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .*

### 4.1.3 Flächen- und Volumsmessung im $\mathbb{R}^3$

Analog zum Flächeninhalt im  $\mathbb{R}^2$  kann man das Volumen einer Teilmenge  $M$  des  $\mathbb{R}^3$  durch das Integral  $\int_M 1 dx_1 dx_2 dx_3$  definieren (soferne dieses Integral

existiert). Bei der näherungsweisen Darstellung von geometrischen Objekten in einem Computer werden aber häufig (im Allgemeinen nicht konvexe) Polyeder verwendet, und auf diese werden wir uns im Folgenden konzentrieren.

*Beispiel:* Die folgende Abbildung zeigt ein Polyeder, das eine (grobe) Approximation eines gekrümmten Werkstücks mit sich verjüngendem Querschnitt sein könnte.



**Definition 4.29** Unter einem **orientierten (ebenen) Polygon**  $P$  im  $\mathbb{R}^3$  verstehen wir ein zyklisch geordnetes  $n$ -Tupel von Punkten  $(p_1, \dots, p_n)$ , welche in einer Ebene des  $\mathbb{R}^3$  liegen, aber nicht auf einer Geraden. Die Punkte  $p_i$  heißen **Ecken** von  $P$ , und die geordneten Paare  $(p_i, p_{i+1})$  von aufeinanderfolgenden Ecken heißen **Kanten** von  $P$  (mit  $p_{n+1} := p_1$ ).

**Definition 4.30** Der **Flächennormalvektor** des orientierten Polygons  $P = (p_1, \dots, p_n)$  im  $\mathbb{R}^3$  ist so definiert:

$$f(P) := \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (p_k - s) \times (p_{k+1} - s),$$

wobei  $s$  ein beliebiger Punkt des  $\mathbb{R}^3$  ist.

Man kann sich das, ähnlich wie in der Ebene, als Summe von Flächennormalvektoren von Dreiecken vorstellen, welche durch einen festen Punkt  $s$  und zwei aufeinanderfolgenden Ecken von  $P$  gebildet werden.

**Bemerkung 4.31** Diese Definition ist unabhängig von der Wahl des Punktes  $s$ .

*Beweis:*

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^n (p_k - s) \times (p_{k+1} - s) = \\
& = \sum_{k=1}^n (p_k \times p_{k+1}) - s \times \sum_{k=1}^n p_{k+1} + s \times \sum_{k=1}^n p_k + \sum_{k=1}^n (s \times s) = \sum_{k=1}^n (p_k \times p_{k+1}), \\
& \text{da } \sum_{k=1}^n p_{k+1} = \sum_{k=1}^n p_k \text{ und } s \times s = o. \quad \square
\end{aligned}$$

**Bemerkung 4.32** Man kann also z.B.  $s = o$  oder  $s = p_1$  setzen. Im ersten Fall ergibt sich

$$f(P) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (p_k \times p_{k+1}).$$

Im zweiten Fall ergibt sich

$$f(P) = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n-1} (p_k - p_1) \times (p_{k+1} - p_1),$$

denn die Summanden mit  $k = 1$  und  $k = n$  sind dann gleich  $o$ .

**Bemerkung 4.33** Der Flächennormalvektor  $f(P)$  steht senkrecht auf die Ebene von  $P$  (d.h. auf den Richtungsraum von  $\text{aff } P$ ).

**Bemerkung 4.34** Sei  $\tilde{P} = (p_n, p_{n-1}, \dots, p_2, p_1)$  das Polygon, das aus  $P = (p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n)$  durch Umkehrung der Reihenfolge der Ecken entsteht. Dann ist  $f(\tilde{P}) = -f(P)$ .

**Definition 4.35** Zwei orientierte Polygone  $P = (p_1, \dots, p_n)$  und  $P' = (p'_1, \dots, p'_m)$  heißen **benachbart**, wenn es genau eine Kante  $(p_i, p_{i+1})$  von  $P$  gibt, sodass  $(p_{i+1}, p_i)$  eine Kante von  $P'$  ist.

$P'$  heißt dann auch **bezüglich der Kante  $(p_i, p_{i+1})$  benachbart** zu  $P$ .

**Definition 4.36** Unter einem **orientierten Polyeder** im  $\mathbb{R}^3$  verstehen wir eine endliche Menge  $Q$  von orientierten Polygonen, sodass für jedes  $P \in Q$  gilt: Zu jeder Kante von  $P$  gibt es genau ein bezüglich dieser Kante benachbartes Polygon  $P' \in Q$ . Die Elemente von  $Q$  nennt man auch **Seitenflächen** von  $Q$ . Wenn alle Seitenflächen Dreiecke sind, spricht man von einem **orientierten Dreieckspolyeder**.

**Definition 4.37** Sei  $Q = \{P_1, \dots, P_m\}$  ein orientiertes Polyeder im  $\mathbb{R}^3$ . Dann verstehen wir unter dem (**signierten**) **Volumen** von  $Q$  die Zahl

$$V(Q) := \frac{1}{3} \sum_{i=1}^m (s_i - s) \cdot f(P_i),$$

wobei  $s$  ein beliebiger Punkt aus  $\mathbb{R}^3$  ist, und  $s_i \in \text{aff } P_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, m\}$ .

*Anschauliche Erklärung:* Wenn man sich  $s$  als einen "inneren Punkt" von  $Q$  vorstellt, dann entspricht  $\frac{1}{3}(s_i - s) \cdot f(P_i)$  dem Volumen der "Pyramide" mit Spitze  $s$  und Grundfläche  $P_i$ . Die Höhe dieser Pyramide ist nämlich gleich  $(s_i - s) \cdot \frac{f(P_i)}{\|f(P_i)\|}$ . Das Volumen von  $Q$  ist dann gleich der Summe der Volumina dieser Pyramiden. Mit der Bezeichnung

$$V(s, P_i) := \frac{1}{3}(s_i - s) \cdot f(P_i)$$

können wir die Volumsformel daher auch so schreiben:

$$V(Q) := \sum_{i=1}^m V(s, P_i).$$

Diese Erklärung ist aber insoferne problematisch, als der Begriff "innerer Punkt" für ein orientiertes Polyeder unter Umständen keinen Sinn hat (wenn nämlich Selbstüberschneidungen auftreten).

**Bemerkung 4.38**  $V(Q)$  kann auch negativ sein. Wenn man die Reihenfolge der Ecken für alle Seitenflächen umkehrt, ändert  $V(Q)$  das Vorzeichen, der Absolutbetrag bleibt aber gleich.

**Bemerkung 4.39** Auf Grund obiger Definition gilt also

$$V(Q) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^m (s_i - s) \cdot \sum_{k=1}^{n_i} (p_{ik} \times p_{i,k+1}) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n_i} \det(s_i - s, p_{ik}, p_{i,k+1})$$

wobei  $P_i = (p_{i1}, \dots, p_{in_i})$ .

**Bemerkung 4.40** Die Definition von  $V(Q)$  ist unabhängig von der Wahl der Punkte  $s$  und  $s_i$ .

*Beweis:*

a) Unabhängigkeit von  $s$ :

$$6V(Q) = \sum_{i=1}^m s_i \cdot \sum_{k=1}^{n_i} (p_{ik} \times p_{i,k+1}) - s \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n_i} (p_{ik} \times p_{i,k+1}).$$

Nun ist aber

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n_i} (p_{ik} \times p_{i,k+1}) = o,$$

denn jeder Summand entspricht einer (orientierten) Kante, und zu jeder solchen Kante gibt es genau eine umgekehrt orientierte Kante. Wegen  $p_{i,k+1} \times p_{i,k} = -(p_{ik} \times p_{i,k+1})$  kürzt sich daher alles weg. Es folgt

$$V(Q) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^m s_i \cdot \sum_{k=1}^{n_i} (p_{ik} \times p_{i,k+1}) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^m s_i \cdot f(P_i)$$

b) Unabhängigkeit von  $s_i$ :

Es genügt, wenn wir einen Summanden  $s_i \cdot f(P_i)$  betrachten. Sei  $s'_i$  ein anderer Punkt aus  $\text{aff } P_i$ . Dann ist  $s_i - s'_i$  ein Vektor aus dem Richtungsraum von  $\text{aff } P_i$  und daher senkrecht auf  $f(P_i)$ , d.h.  $(s_i - s'_i) \cdot f(P_i) = 0$ , also  $s_i \cdot f(P_i) = s'_i \cdot f(P_i)$ .  $\square$

Als Nebenresultat erhalten wir aus dem ersten Teil des Beweises:

**Bemerkung 4.41** *Die Summe der Flächennormalvektoren aller Seitenflächen eines orientierten Polyeders ist gleich dem Nullvektor.*

**Bemerkung 4.42** *Mit  $s = o$  und  $s_i = p_{i1}$  ergibt sich*

$$V(Q) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n_i} \det(p_{i1}, p_{ik}, p_{i,k+1}).$$

*Die Summanden mit  $k = 1$  und  $k = n_i$  können wir hier weglassen, denn  $\det(p_{i1}, p_{i1}, p_{i,k+1}) = 0$  und  $\det(p_{i1}, p_{in_i}, p_{i,n_i+1}) = \det(p_{i1}, p_{in_i}, p_{i1}) = 0$ . Es gilt also auch*

$$V(Q) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^m \sum_{k=2}^{n_i-1} \det(p_{i1}, p_{ik}, p_{i,k+1}).$$

*Speziell für Dreieckspolyeder (d.h.  $n_i = 3$  für alle  $i$ ) folgt*

$$V(Q) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^m \det(p_{i1}, p_{i2}, p_{i3}).$$

Beispiele:

1. Als erstes Beispiel betrachten wir, gewissermaßen zur Kontrolle, den (orientierten) Einheitswürfel, dessen Ecken wir wie folgt bezeichnen:

$$o = (0, 0, 0), a = (1, 0, 0), b = (0, 1, 0), c = (0, 0, 1),$$

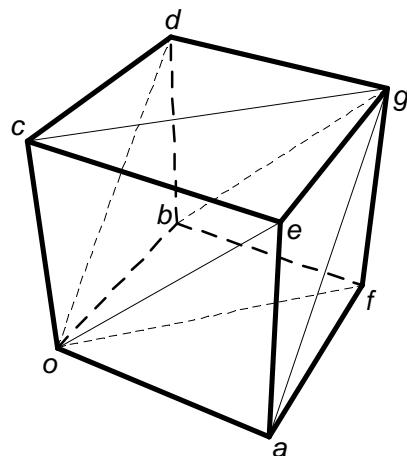
$$d = b + c = (0, 1, 1),$$

$$e = a + c = (1, 0, 1),$$

$$f = a + b = (1, 1, 0),$$

$$g = a + b + c = (1, 1, 1).$$

Die folgende Abbildung zeigt diesen Würfel, wobei die Seitenflächen in Dreiecke zerlegt sind.



Die Seitenflächen des Würfels sind folgenderweise definiert:

$$P_1 = (o, a, e, c), P_2 = (a, f, g, e), P_3 = (b, d, g, f), P_4 = (o, c, d, b), \\ P_5 = (o, b, f, a), P_6 = (c, e, g, d).$$

Wir wählen nun  $s = o$  und nehmen für  $s_i$  jeweils die erste Ecke von  $P_i$ . Die Seiten, welche  $o$  als (erste) Ecke haben, können wir weglassen.. Daher haben wir nur drei Summanden zu berücksichtigen, also

$$6V(Q) = (\det(a, f, g) + \det(g, e, a)) + (\det(b, d, g) + \det(b, g, f)) + (\det(c, e, g) + \det(c, g, d)).$$

Da diese Determinanten alle gleich 1 sind, ergibt sich für das Volumen des Einheitswürfels also tatsächlich der Wert 1.

2. Ein etwas interessanteres Beispiel ist das *reguläre Ikosaeder* (siehe Abbildung Seite 80). Dieses Dreieckspolyeder kann man z.B. folgenderweise definieren:

Sei  $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  das Verhältnis des goldenen Schnitts. Diese Zahl ist durch die Gleichung

$$\tau = \frac{1+\tau}{\tau}$$

charakterisiert (d.h.  $\tau^2 = 1 + \tau$ ).

Dann sind die folgenden 12 Punkte die Ecken des zu definierenden Polyeders (siehe z.B. [4]):

$$(0, \pm\tau, \pm 1), (\pm 1, 0, \pm\tau), (\pm\tau, \pm 1, 0).$$

Die Seitenflächen des Polyeders sind die folgenden vier Dreiecke, sowie alle Dreiecke, die man durch ein- oder mehrmalige Spiegelung an den Koordinatenebenen daraus erhält:

$$\Delta_1 = ((0, \tau, 1), (1, 0, \tau), (\tau, 1, 0)),$$

$$\Delta_2 = ((0, \tau, 1), (-1, 0, \tau), (1, 0, \tau)),$$

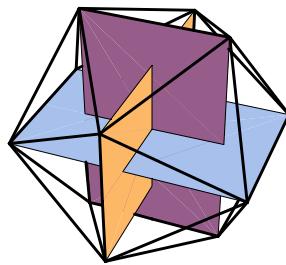
$$\Delta_3 = ((1, 0, \tau), (\tau, -1, 0), (\tau, 1, 0)),$$

$$\Delta_4 = ((\tau, 1, 0), (0, \tau, -1), (0, \tau, 1)).$$

Bei jeder Spiegelung ist allerdings die Orientierung umzukehren. So erhalten wir z.B. aus  $\Delta_1$  durch Spiegelung an der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene und anschließende Vertauschung der ersten beiden Ecken die folgende Seitenfläche:

$$\Delta'_1 = ((1, 0, -\tau), (0, \tau, -1), (\tau, 1, 0)).$$

Insgesamt ergeben sich auf diese Weise 20 verschiedene Seitenflächen.



Wir verwenden nun die Formel  $V(Q) = \sum_{i=1}^{20} V(s, \Delta_i)$  und wählen  $s = o$ . Da sich bei Spiegelung einer Seitenfläche und anschließender

Orientierungsumkehr das Volumen  $V(o, \Delta_i)$  des zugehörigen Tetraeders nicht ändert, brauchen wir dieses nur für die ersten vier Seitenflächen auszurechnen:

$$6 V(o, \Delta_1) = \begin{vmatrix} 0 & \tau & 1 \\ 1 & 0 & \tau \\ \tau & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 + \tau^3 = 1 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 = 3 + \sqrt{5}$$

$$6 V(o, \Delta_2) = \begin{vmatrix} 0 & \tau & 1 \\ -1 & 0 & \tau \\ 1 & 0 & \tau \end{vmatrix} = 2\tau^2 = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5})^2 = 3 + \sqrt{5}.$$

und ebenso  $6 V(o, \Delta_3) = 6 V(o, \Delta_4) = 2\tau^2 = 3 + \sqrt{5}$ .

Die Volumina der Tetraeder sind also alle gleich groß, und wir erhalten für das Volumen des regulären Ikosaeders die Zahl

$$20 V(o, \Delta_1) = \frac{20}{3} \tau^2 = \frac{10}{3} (3 + \sqrt{5}) = 17.4535\dots$$

Übrigens: Die Kantenlängen dieses Polyeders sind alle gleich 2, wie man leicht nachrechnen kann. Z.B. ist

$$\begin{aligned} \|(0, \tau, 1) - (1, 0, \tau)\|^2 &= \|(-1, \tau, 1 - \tau)\|^2 = \\ &= 1 + \tau^2 + (1 - \tau)^2 = 2(1 + \tau^2 - \tau) = 4. \end{aligned}$$

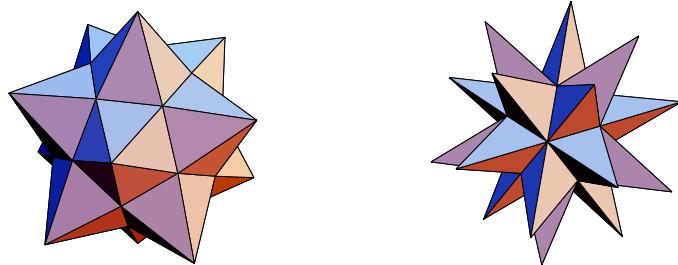
Die Ecken haben alle vom Ursprung den gleichen Abstand  $r = \sqrt{1 + \tau^2} = \frac{1}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = 1.902113\dots$ . Das heißt, das Polyeder ist einer Kugel mit Radius  $r$  einbeschrieben. Will man z.B. das Volumen eines regulären Ikosaeders berechnen, das der Einheitskugel einbeschrieben ist, so braucht man nur den obigen Wert durch  $r^3$  zu dividieren (siehe Satz 4.57):

$$\frac{10}{3} (3 + \sqrt{5}) / \left(\frac{1}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right)^3 = 2.53615\dots$$

Diese Zahl ist trotz der in gewissem Sinne "kugelförmigen" Gestalt des regulären Ikosaeders noch beträchtlich kleiner als das Volumen der Einheitskugel, das bekanntlich  $4\pi/3 = 4.18879\dots$  beträgt.

3. Die Seitenflächen eines orientierten Polyeders können sich auch gegenseitig überschneiden. Auf diese Weise erhält man z.B. die folgenden beiden *regulären Sternpolyeder*, die wie die "stella octangula" schon

von Kepler untersucht wurden:



Die Seitenflächen beider Sternpolyeder sind Sternpolygone  $R_{5,2}$ . Die (ursprünglichen) Ecken stimmen mit denen eines regulären Ikosaeders bzw. Dodekaeders überein (siehe Kapitel 3.4.6). Beim ersten Polyeder stoßen in jeder Ecke fünf der (ursprünglichen) Seitenflächen zusammen, beim zweiten jedoch nur drei.

Sehen wir uns das erste dieser beiden Sternpolyeder näher an. Eine Seitenfläche ist z.B.

$$P = ((\tau, -1, 0), (0, \tau, 1), (0, -\tau, 1), (\tau, 1, 0), (-1, 0, \tau)).$$

$P$  liegt in der Ebene mit Gleichung  $x_1 + \tau x_3 = \tau$ , wie sich leicht aus  $\tau^2 = \tau + 1$  ergibt. Der Mittelpunkt (Schwerpunkt) von  $P$  ist  $p_0 := \frac{1}{5}(2\tau - 1, 0, \tau + 2) = (\frac{1}{5}\sqrt{5}, 0, \frac{1}{2} + \frac{1}{10}\sqrt{5})$ .

Betrachten wir z.B. das Teildreieck  $\Delta_1 := (p_0, (\tau, -1, 0), (0, \tau, 1))$ . Dann erhalten wir für die entsprechende Determinante  $\det \Delta_1$ :

$$5 \det(\Delta_1) = \begin{vmatrix} 2\tau - 1 & 0 & \tau + 2 \\ \tau & -1 & 0 \\ 0 & \tau & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2\tau + 2\tau^2 + \tau^3 = 5 + \sqrt{5}.$$

Für die anderen Teildreiecke der Seitenfläche  $P$  ergibt sich dieselbe Determinante. Da alle anderen Seitenflächen durch Spiegelungen an Koordinatenebenen entstehen, erhalten wir

$$V = \frac{1}{6} \cdot 12 \cdot 5 \det(\Delta_1) = 10 + 2\sqrt{5} = 14.472 \dots$$

(Das ist natürlich nicht gleich dem Volumen des einfachen Polyeders, das oberflächlich betrachtet genauso aussieht!)

### Oberfläche von Polyedern und gekrümmten Flächen

**Definition 4.43** Sei  $Q = \{P_1, \dots, P_m\}$  ein orientiertes Polyeder im  $\mathbb{R}^3$ . Unter dem **Flächeninhalt** oder der **Oberfläche** (engl. **surface area**) von  $Q$  versteht man die Summe der Flächeninhalte der Seitenflächen von  $Q$ :

$$F(Q) := \sum_{i=1}^m \|f(P_i)\|.$$

*Bemerkung:* In der Differentialgeometrie geht man zur Definition der Oberfläche einer gekrümmten Fläche folgenderweise vor:

**Definition 4.44** Unter einer **parametrisierten Fläche** im  $\mathbb{R}^3$  (mit rechteckigem Definitionsbereich) versteht man eine stetig differenzierbare Abbildung  $s : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , wobei  $a_i$  und  $b_i$  reelle Zahlen mit  $a_1 < b_1$  und  $a_2 < b_2$  sind.

Man kann hier statt Rechtecken auch andere Definitionsbereiche zulassen, z.B. beliebige offene Teilmengen des  $\mathbb{R}^2$ .

Ähnlich wie bei den Kurven kann man für parametrisierte Flächen eine Äquivalenzrelation durch geeignete Parametertransformationen definieren und nennt dann die Äquivalenzklassen einfach *Flächen*.

**Definition 4.45** Sei  $s : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Fläche. Dann versteht man unter der **Oberfläche** oder dem **Flächeninhalt** von  $s$  die Zahl

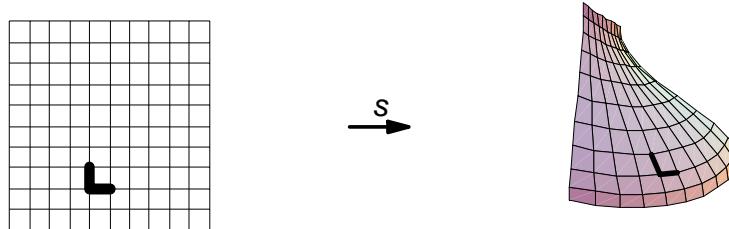
$$\int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} \|s_x \times s_y\| \, dx \, dy,$$

wobei

$$s_x := \frac{\partial s}{\partial x}(x, y) \quad \text{und} \quad s_y := \frac{\partial s}{\partial y}(x, y).$$

Diese Definition kann man anschaulich so interpretieren: Zerlegt man den Definitionsbereich in viele sehr kleine Rechtecke mit Seitenlängen  $dx$  und  $dy$ , so werden diese durch die Abbildung  $s$  (näherungsweise) auf Parallelogramme abgebildet, welche durch die Vektoren  $s_x \, dx$  und  $s_y \, dy$  erzeugt werden. Die Norm des äußeren Produkts dieser beiden Vektoren gibt jeweils den Inhalt

des Parallelogramms an, und das Integral entspricht dann der Summe der Flächeninhalte aller dieser Parallelogramme.



*Achtung:* Ein wesentlicher Unterschied zu der Länge von Kurven besteht darin, dass die Oberfläche einer gekrümmten Fläche nicht ohne weiteres als Limes der Oberfläche von einbeschriebenen Polyedern aufgefasst werden kann, wie das Beispiel von Schwarz (siehe Ende des Abschnitts 4.1.1) zeigt.

#### 4.1.4 Verallgemeinerung auf den $\mathbb{R}^d$

Die bisherigen Überlegungen lassen sich auf den  $\mathbb{R}^d$  übertragen. Die Analoga zu den Dreieckspolyedern sind dann die simplizialen Polyeder, auf die wir uns hier beschränken. Wir beginnen mit der Definition orientierter Simplizes.

**Definition 4.46** Seien  $r$  und  $d$  natürliche Zahlen mit  $0 \leq r \leq d$ . Unter einem **orientierten  $r$ -Simplex** im  $\mathbb{R}^d$  verstehen wir ein  $(r+1)$ -Tupel  $S = (p_0, p_1, \dots, p_r)$  von paarweise verschiedenen Punkten  $p_i$  des  $\mathbb{R}^d$ , wobei zwei solche  $(r+1)$ -Tupel als gleich angesehen werden, wenn sie sich nur durch eine gerade Permutation unterscheiden. Die Punkte  $p_i$  heißen dann die **Ecken** oder **Eckpunkte** dieses Simplex. Die konvexe Hülle der Eckpunkte heißt das zugehörige (**nicht-orientierte**) **Simplex** und wird mit  $|S|$  bezeichnet.

Die leere Folge  $()$  heißt auch **leeres Simplex** und wird als orientiertes  $(-1)$ -Simplex betrachtet.

*Bemerkungen:*

1. Bringt man die Ecken eines gewöhnlichen (nicht-orientierten) Simplex  $S$  in eine bestimmte Reihenfolge, so erhält man ein orientiertes Simplex  $S'$  mit  $S = |S'|$ . Es gibt natürlich zu jedem gewöhnlichen  $r$ -Simplex (mit  $r > 0$ ) genau zwei zugehörige orientierte Simplizes.

3. Ein orientiertes 1-Simplex ist nichts anderes als eine orientierte Strecke. Orientierte 2-Simplizes sind orientierte Dreiecke (vgl. Definition 4.14), und orientierte 3-Simplizes sind orientierte Tetraeder (Definition 4.36).
4. Ein orientiertes 0-Simplex besteht nur aus einem Punkt und wird daher manchmal mit diesem Punkt identifiziert. Wenn man analog zum Fall  $r > 0$  zwei verschiedene zu einem Punkt gehörige orientierte 0-Simplizes unterscheiden will, muss man zusätzlich ein Orientierungssymbol angeben, also etwa  $+(p)$  und  $-(p)$ .

**Definition 4.47** Sei  $S = (p_0, p_1, \dots, p_r)$  ein orientiertes  $r$ -Simplex. Dann verstehen wir unter  $-S$  das umgekehrt orientierte Simplex. (Dieses wird z.B. durch  $(p_1, p_0, p_2, \dots, p_r)$  repräsentiert.)

Wir setzen nun für beliebiges  $k \in \mathbb{Z}$

$$(-1)^k S := \begin{cases} S & \text{für } k \text{ gerade,} \\ -S & \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

**Definition 4.48** Unter den **Facetten** eines orientierten  $r$ -Simplex  $S = (p_0, p_1, \dots, p_r)$  verstehen wir die orientierten  $(r-1)$ -Simplizes  $(-1)^k S^{(k)}$  mit  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ , wobei  $S^{(k)}$  aus  $S$  durch Weglassung von  $p_k$  entsteht.

Für  $k = 1$  ergibt sich also z.B. die Facette  $-(p_0, p_2, \dots, p_r) = (p_2, p_0, p_3, \dots, p_r)$ .

Für  $r = 2$  und  $3$  entspricht diese Definition genau den Kanten eines orientierten Dreiecks bzw. den Seitenflächen eines orientierten Tetraeders (siehe Definitionen 4.15 und 4.36).

Die folgenden Definitionen sind nun ganz analog zu den entsprechenden im  $\mathbb{R}^3$ .

**Definition 4.49** Seien  $S$  und  $S'$  zwei orientierte  $r$ -Simplizes im  $\mathbb{R}^d$ . Wenn es genau eine Facette  $F$  von  $S$  gibt, sodass  $-F$  eine Facette von  $S'$  ist, so nennen wir  $S$  und  $S'$  (bezüglich der Facette  $F$ ) **benachbart**.

**Definition 4.50** Unter einem **orientierten simplizialen Polyeder**  $Q$  im  $\mathbb{R}^d$  verstehen wir eine endliche Menge von orientierten  $(d-1)$ -Simplizes, sodass gilt:

1. Je zwei Simplizes  $S, S' \in Q$  sind entweder benachbart oder sie haben höchstens  $d - 2$  gemeinsame Ecken.
2. Zu jeder Facette eines Simplex  $S \in Q$  gibt es genau ein bezüglich dieser Facette benachbartes Simplex  $S' \in Q$ .
3. Für je zwei verschiedene Simplizes  $S, S' \in Q$  gibt es eine Folge von paarweise verschiedenen Simplizes  $(S_1, \dots, S_k)$  mit  $S_1 = S$  und  $S_k = S'$ , sodass  $S_i$  und  $S_{i+1}$  für alle  $i \in \{1, \dots, k-1\}$  benachbart sind.

Die orientierten Simplizes, aus denen  $Q$  besteht, nennt man die **Facetten** von  $Q$ .

**Definition 4.51** Sei  $Q = \{S_1, \dots, S_m\}$  ein orientiertes simpliziales Polyeder im  $\mathbb{R}^d$ . Dann heißt

$$\overline{Q} := \{\text{conv } \Delta_1, \dots, \text{conv } \Delta_m\}$$

das zugehörige (nicht-orientierte) **simpliziale Polyeder**, und

$$|Q| := \bigcup_{i=1}^m \text{conv } S_i$$

heißt die **Trägermenge** von  $Q$  bzw.  $\overline{Q}$ .

Das Volumen eines orientierten simplizialen Polyeders definieren wir nun entsprechend zu Definition 4.37:

**Definition 4.52** Sei  $Q$  ein orientiertes simpliziales Polyeder im  $\mathbb{R}^d$  mit den Facetten  $S_j = (p_{j1}, \dots, p_{jd})$  für  $j = 1, \dots, m$ . Dann verstehen wir unter dem (**signierten**) **Volumen** von  $Q$  die reelle Zahl

$$V(Q) := \sum_{j=1}^m V(s, p_{j1}, \dots, p_{jd}),$$

mit

$$V(s, p_1, \dots, p_d) := \frac{1}{d!} \det(p_1 - s, \dots, p_d - s),$$

wobei  $s$  ein beliebiger Punkt des  $\mathbb{R}^d$  ist.

Man kann wieder zeigen, dass diese Definition unabhängig von der Wahl des Punktes  $s$  ist. Daher gilt

$$V(Q) = \frac{1}{d!} \sum_{j=1}^m \det(p_{j1}, \dots, p_{jd}).$$

(Siehe Satz 4.42.)

## 4.2 Isometrien

**Definition 4.53** Eine Affinität  $\alpha : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  heißt **Isometrie** oder **Kongruenztransformation**, wenn sie den Abstand von je zwei Punkten unverändert lässt, das heißt wenn

$$\|\alpha(x) - \alpha(y)\| = \|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^d.$$

*Bemerkung:* Isometrien werden auch **Bewegungen** genannt. Allerdings versteht man unter "Bewegung" oft auch innerhalb der Mathematik etwas anderes, nämlich eine "stetige Schar" von Isometrien, die zur mathematischen Modellierung eines physikalischen Bewegungsvorgangs dienen kann. Genauer geht es dabei um stetige Abbildungen der folgenden Art:

$$f : [a, b] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d : (t, x) \mapsto f(t, x)$$

mit  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , wobei für jedes feste  $t \in [a, b]$  die Abbildung  $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d : x \mapsto f(t, x)$  eine Isometrie ist. Stellt man sich vor, dass  $[a, b]$  ein Zeitintervall und  $M \subset \mathbb{R}^d$  ein (starrer) Körper ist, dann beschreibt  $f(t, M)$  die Lage dieses Körpers zum Zeitpunkt  $t$ .

Von nun an werden wir nur Bewegungen im Sinne von Isometrien betrachten.

**Satz 4.54** Eine Affinität  $\alpha : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  ist genau dann eine Isometrie, wenn die zugehörige lineare Abbildung orthogonal ist.

*Beweis:*

Das folgt einfach aus der Tatsache, dass eine lineare Abbildung genau dann orthogonal ist, wenn sie die Norm jedes Vektors unverändert lässt: Sei  $\alpha(x) = Ax + b$ . Dann gilt

$$\|\alpha(x) - \alpha(y)\| = \|(Ax + b) - (Ay + b)\| = \|Ax - Ay\| = \|A(x - y)\|,$$

und  $\|A(x - y)\| = \|x - y\|$  für beliebige Vektoren  $x, y$  genau dann, wenn  $A$  orthogonal ist.  $\square$

**Definition 4.55** Zwei Teilmengen  $M$  und  $M'$  des  $\mathbb{R}^d$  heißen **kongruent**, wenn es eine Isometrie  $\alpha$  des  $\mathbb{R}^d$  gibt, welche  $M$  auf  $M'$  abbildet (d.h.  $M' = \alpha(M)$ ).

**Satz 4.56** *Zwei Strecken des  $\mathbb{R}^d$  sind genau dann gleich lang, wenn sie kongruent sind.*

*Beweis:* Auf Grund der Definition einer Isometrie sind zwei kongruente Strecken stets gleich lang.

Seien nun umgekehrt  $[a, b]$  und  $[a', b']$  zwei gleich lange Strecken mit der Länge  $\lambda$ . Wenn  $\lambda = 0$  ist, dann handelt es sich eigentlich um Punkte, und die Translation  $x \mapsto x + a' - a$  bildet den einen Punkt auf den anderen ab.

Sei also jetzt  $\lambda > 0$  und  $v := \frac{1}{\lambda}(b - a)$ ,  $v' := \frac{1}{\lambda}(b' - a')$ . Dann sind  $v$  und  $v'$  normierte Vektoren, und wir können jeden von ihnen zu einer Orthonormalbasis  $B$  bzw.  $B'$  erweitern (siehe Lineare Algebra: Schmidt'sches Orthonormalisierungsverfahren). Sei  $A := B'B^{-1}$  (wobei wir  $B$  und  $B'$  mit den zugehörigen orthogonalen Matrizen identifizieren). Dann ist  $A$  eine orthogonale Abbildung mit  $AB = B'$ , und daher insbesondere  $Av = v'$ . Mit der Isometrie  $\alpha : x \mapsto A(x - a) + a'$  folgt dann  $\alpha(a) = a'$  und  $\alpha(b) = b'$  und somit auch  $\alpha([a, b]) = [a', b']$ . Damit ist gezeigt, dass  $[a, b]$  und  $[a', b']$  kongruent sind.  $\square$

Die Isometrien des  $\mathbb{R}^d$  bilden in natürlicher Weise eine Gruppe, da das Produkt und die Inverse von orthogonalen Matrizen wieder orthogonal sind. Daraus folgt sofort, dass die oben definierte Kongruenz eine Äquivalenzrelation ist (vgl. Axiom III.2 von Hilbert).

Die zugehörige Geometrie im Sinne von Felix Klein heißt **euklidische Geometrie**. Sie besteht aus dem Studium der Invarianten unter den zu dieser Gruppe gehörigen Transformationen. Wie wir soeben gesehen haben, ist der Abstand eine solche Invariante. Daraus folgt sofort, dass auch die Länge von Streckenzügen und daher auch die Länge von Kurven invariant gegenüber Isometrien sind. Weitere wichtige Invarianten sind Flächeninhalt und Volumen, wie wir uns jetzt überlegen wollen.

**Satz 4.57** *Sei  $Q$  ein orientiertes simpliziales Polyeder und  $\alpha : x \mapsto Ax + b$  eine Affinität im  $\mathbb{R}^d$ . Dann gilt*

$$V(\alpha(Q)) = V(Q) \cdot \det A.$$

*Beweis:* Das  $d$ -dimensionale Volumen ist eine Summe gewisser Determinanten von je  $d$  Vektoren (siehe Definition 4.52). Diese Vektoren werden bei

Anwendung von  $\alpha$  mit der zu  $\alpha$  gehörigen linearen Abbildung  $x \mapsto Ax$  transformiert. Es genügt daher, zu zeigen

$$\det(Av_1, \dots, Av_d) = (\det A) (\det(v_1, \dots, v_d)) \quad \text{für } v_1, \dots, v_d \in \mathbb{R}^d.$$

Das ist aber nichts anderes als der bekannte Determinantenmultiplikationssatz, denn die Matrix  $(Av_1, \dots, Av_d)$  ist das Produkt der Matrix  $A$  mit der Matrix  $(v_1, \dots, v_d)$ .  $\square$

Da die Determinante einer orthogonalen Matrix nur  $+1$  oder  $-1$  sein kann, folgt:

**Satz 4.58** *Das  $d$ -dimensionale Volumen von nicht-orientierten simplizialen Polyedern im  $\mathbb{R}^d$  (das heißt für  $d = 2$  der Flächeninhalt von nicht-orientierten Polygonen) ist invariant gegenüber Isometrien.*

Anders ausgedrückt heißt das: Wenn zwei nicht-orientierte Polyeder kongruent sind, dann haben sie gleiches Volumen.

Das  $d$ -dimensionale Volumen bleibt allerdings nicht nur bei Isometrien unverändert, sondern auch bei allen Affinitäten, deren Matrix Determinante  $\pm 1$  hat. Diese Affinitäten bilden eine Gruppe, und das führt zu einer eigenen Geometrie im Sinne von Felix Klein, die wir aber nicht näher studieren werden. Hier sei nur ein Beispiel einer solchen Affinität angeführt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

Diese Affinität bildet z.B. das Einheitsquadrat auf ein Parallelogramm mit den Ecken  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(0, 1)$  und  $(1, 2)$  ab.

**Definition 4.59** *Sei  $\alpha : x \mapsto Ax + b$  eine Isometrie des  $\mathbb{R}^d$ . Wenn  $\det A = 1$  ist, nennen wir  $\alpha$  eine **orientierungstreue Isometrie** (oder **eigentliche Bewegung**).*

**Definition 4.60** *Zwei Teilmengen  $M$  und  $M'$  des  $\mathbb{R}^d$  heißen **gleichsinnig kongruent**, wenn es eine orientierungstreue Isometrie  $\alpha$  des  $\mathbb{R}^d$  gibt, welche  $M$  auf  $M'$  abbildet.*

Die orientierungstreuen Isometrien bilden eine Untergruppe der Gruppe aller Isometrien, denn die Matrix der Zusammensetzung zweier Isometrien  $x \mapsto$

$Ax + b$  und  $x \mapsto A'x + b'$  ist gleich  $AA'$ , und  $\det(AA') = (\det A)(\det A') = 1$ , falls  $\det A = \det A' = 1$ . Daraus folgt wieder, dass die gleichsinnige Kongruenz eine Äquivalenzrelation ist.

Wir sehen nun:

**Satz 4.61** *Das  $d$ -dimensionale Volumen von orientierten Polyedern im  $\mathbb{R}^d$  (das heißt für  $d = 2$  der Flächeninhalt von orientierten Polygonen) ist invariant gegenüber orientierungstreuen Isometrien.*

Beispiele von Isometrien  $\alpha : x \mapsto Ax + b$  mit  $b = o$  kennen wir aus der linearen Algebra: Drehungen und Spiegelungen, wobei die Drehachse bzw. die Spiegelungshyperebene durch den Ursprung geht.

Um einen Überblick über die Isometrien auch mit  $b \neq o$  zu erhalten, ist es zweckmäßig, die Fixpunkte von  $\alpha$  zu studieren, das sind Punkte  $x$  mit  $\alpha(x) = x$ , also  $Ax + b = x$ . Die Fixpunkte sind somit die Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$(A - E)x = -b.$$

Dieses Gleichungssystem hat genau dann mindestens eine Lösung, wenn der Rang von  $A - E$  mit dem Rang der erweiterten Matrix  $(A - E, b)$  übereinstimmt. Die Dimension der Lösungsmenge ist dann gleich  $d - \text{rank}(A - E)$ . Das liefert uns den Schlüssel für eine sinnvolle Klassifikation der Isometrien des  $\mathbb{R}^d$ , die wir im Folgenden für  $d = 2$  und  $3$  im Einzelnen durchführen.

### 4.2.1 Klassifikation der Isometrien im $\mathbb{R}^2$

Sei  $\alpha : x \mapsto Ax + b$  eine Isometrie des  $\mathbb{R}^2$  und  $r = \text{rank}(A - E)$ ,  $r_e = \text{rank}(A - E, b)$ . Die zu  $\alpha$  gehörige lineare Abbildung  $f_A$  bezeichnen wir kurz mit  $f$ .

Da  $0 \leq r \leq r_e \leq 2$  und  $r \leq r_e \leq r + 1$ , unterscheiden wir folgende Fälle:

1.  $r = r_e = 0$ :

In diesem Fall ist  $A - E = O$ , also  $A = E$ , und  $b = o$ . Daher ist  $\alpha$  die **identische Abbildung**  $x \mapsto x$ .

2.  $r = 0, r_e = 1$ :

Hier ist wieder  $A = E$ , aber  $b \neq o$ . Daher handelt es sich um die **Translation**  $x \mapsto x + b$ .

3.  $r = 1, r_e = 1$ :

In diesem Fall ist die Lösungsmenge von  $(A - E)x = -b$  eine Gerade  $G$ . Sei  $x = p + \lambda v$  eine Parameterdarstellung von  $G$  mit einem normierten Richtungsvektor  $v$ . Dann gilt also

$$\alpha(p + \lambda v) = p + \lambda v \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Der Vektor  $v$  ist eine Lösung des homogenen Gleichungssystems  $(A - E)x = o$ , also gilt  $Av = v$ .

Wir können  $v$  zu einer Orthonormalbasis (kurz ONB)  $\{v, w\}$  des  $\mathbb{R}^2$  ergänzen. Da  $A$  eine orthogonale Matrix ist, sind auch  $Av = v$  und  $Aw$  zueinander orthogonal. Dann muss aber  $Aw = \pm w$  sein.

(Das sieht man z.B. so: Es gibt jedenfalls  $\lambda_1, \mu_1 \in \mathbb{R}$ , sodass  $Aw = \lambda_1 v + \mu_1 w$ . Insbesondere ist  $\lambda_1 = (Aw) \cdot v$ . Da  $Aw$  zu  $v$  orthogonal ist, folgt  $\lambda_1 = 0$  und somit  $Aw = \mu_1 w$ . Wegen  $\|Aw\| = \|w\| = 1$  folgt daraus  $\mu_1 = 1$  oder  $-1$ , also  $Aw = \pm w$ .)

Die Möglichkeit  $Aw = w$  kommt nicht in Frage, da sonst  $A = E$  wäre, im Widerspruch zu  $r = 1$ . Folglich ist  $Aw = -w$ .

Jeder Punkt  $x$  des  $\mathbb{R}^2$  lässt sich in eindeutiger Weise so darstellen:

$$x = p + \lambda v + \mu w.$$

Für den Bildpunkt von  $x$  erhalten wir nun:  $\alpha(x) = A(p + \lambda v + \mu w) + b = A(p + \lambda v) + A(\mu w) + b = p + \lambda v - \mu w$ ,

denn  $A(p + \lambda v) + b = \alpha(p + \lambda v) = p + \lambda v$ . Daher nennt man in diesem Fall  $\alpha$  eine **Spiegelung** an der Geraden  $G$ .  $G$  heißt dann *Spiegelungsachse*.

4.  $r = 1, r_e = 2$ :

Auch in diesem Fall hat das System  $(A - E)x = o$  einen Lösungsvektor  $\neq o$ . Es gibt daher wieder einen normierten Vektor  $v$  mit  $Av = v$ , den wir zu einer ONB  $\{v, w\}$  ergänzen können. Stellen wir nun  $b$  als Linearkombination von  $v$  und  $w$  dar:  $b = \beta v + \gamma w$ . Dann können wir  $\alpha$  als Zusammensetzung der folgenden beiden Abbildungen auffassen:

$$\begin{aligned} \alpha_1 : x &\mapsto Ax + \gamma w, \\ \alpha_2 : x &\mapsto x + \beta v. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist  $\alpha_2$  eine Translation, und  $\alpha = \alpha_2 \circ \alpha_1$ .

Überlegen wir uns nun, was für eine Abbildung  $\alpha_1$  ist. Wie im vorigen Fall sehen wir, dass  $Aw = -w$  ist. Die Matrix der zugehörigen linearen

Abbildung  $f$  bezüglich der Basis  $(v, w)$  lautet daher  $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , und der Koordinatenvektor von  $\gamma w$  bezüglich dieser Basis ist  $b' = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \end{pmatrix}$ . Betrachten wir nun

$$(A' - E, b') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \gamma \end{pmatrix},$$

so sehen wir, dass hier der Fall 3 vorliegt, das heißt es handelt sich um eine Spiegelung. Die Spiegelungssachse ergibt sich durch Lösung des Gleichungssystems  $(A' - E)x = -b'$ , d.h.  $2x_2 = \gamma$ . Das ist eine Gerade, die parallel zur 1. Koordinatenachse ist, natürlich bezüglich der Basis  $(v, w)$ . Wir sehen also:  $\alpha$  ist die *Zusammensetzung einer Spiegelung und einer Translation, wobei die Translation in Richtung der Spiegelungssachse erfolgt*. So etwas nennt man eine **Gleitspiegelung**.

5.  $r = 2, r_e = 2$ :

Hier ist die Lösungsmenge von  $(A - E)x = -b$  ein Punkt, sagen wir  $\{p\}$ .

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  ist eine orthogonale Matrix. Daher ist  $a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1$ , und folglich gibt es es genau ein  $\gamma \in (-\pi, \pi]$ , sodass  $a_{11} = \cos \gamma$  und  $a_{21} = \sin \gamma$  (siehe Vorlesungen oder Bücher über Analysis). Die Matrix hat also folgende Gestalt:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \gamma & a_{12} \\ \sin \gamma & a_{22} \end{pmatrix}$$

Andererseits ist  $\det A = \pm 1$ . Unterscheiden wir nun zwei Fälle:

a)  $\det A = +1$ .

Das heißt

$$(-\sin \gamma)a_{12} + (\cos \gamma)a_{22} = 1.$$

Da die beiden Spalten von  $A$  zueinander orthogonal sind, gilt

$$(\cos \gamma)a_{12} + (\sin \gamma)a_{22} = 0.$$

Das ergibt zusammen ein lineares Gleichungssystem in den Unbekannten  $a_{12}$  und  $a_{22}$ . Die Determinante dieses Systems ist  $-\sin^2 \gamma - \cos^2 \gamma = -1$ , also gibt es genau eine Lösung, und diese lautet offensichtlich

$$\begin{aligned} a_{12} &= -\sin \gamma, \\ a_{22} &= \cos \gamma. \end{aligned}$$

Daher ist  $A$  die Matrix einer Drehung um den Winkel  $\gamma$ :

$$A = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}.$$

Sei nun, wie schon oben gesagt,  $p$  die eindeutige Lösung von  $(A - E)x = -b$ , also  $(A - E)p = -b$ , oder gleichbedeutend damit  $Ap + b = p$ . Für jeden Punkt  $x \in \mathbb{R}^2$  gilt nun:

$$\alpha(x) = Ax + b = A(x - p + p) + b = A(x - p) + Ap + b = A(x - p) + p.$$

$\alpha(x)$  erhält man also, indem man auf den Vektor  $x - p$  die Drehung mit Matrix  $A$  anwendet und den Ergebnisvektor von  $p$  abträgt. Die Abbildung  $\alpha$  nennt man daher eine **Drehung** um den Punkt  $p$ .

**b)**  $\det A = -1$ .

Das hieße

$$(-\sin \gamma)a_{12} + (\cos \gamma)a_{22} = -1.$$

Zusammen mit

$$(\cos \gamma)a_{12} + (\sin \gamma)a_{22} = 0.$$

gäbe das ein lineares Gleichungssystem mit der eindeutigen Lösung

$$\begin{aligned} a_{12} &= \sin \gamma, \\ a_{22} &= -\cos \gamma. \end{aligned}$$

Dann würde aber folgen:

$$\det(A - E) = (\cos \gamma - 1)(-\cos \gamma - 1) - \sin^2 \gamma = 0,$$

also wäre der Rang von  $A - E$  kleiner als 2, und das ist ein Widerspruch zu  $r = 2$ .

Aus dieser Klassifikation ergeben sich unmittelbar die folgenden interessanten Sätze:

**Satz 4.62** *Jede eigentliche Bewegung im  $\mathbb{R}^2$  ist eine Drehung oder eine Translation (eventuell mit Drehwinkel = 0 bzw. Translationsvektor = 0).*

Daher ist auch die Zusammensetzung zweier Drehungen (mit verschiedenen Drehpunkten) oder die Zusammensetzung einer Drehung und einer Translation immer wieder entweder eine Drehung oder eine Translation.

**Satz 4.63** *Jede uneigentliche Bewegung im  $\mathbb{R}^2$  ist eine Spiegelung oder Gleitspiegelung.*

Insbesondere ist also die Zusammensetzung einer Drehung mit einer Spiegelung immer wieder eine Spiegelung oder Gleitspiegelung. Im Gegensatz zum  $\mathbb{R}^3$  (siehe nächster Abschnitt) gibt es also im  $\mathbb{R}^2$  keine eigene Kategorie "Drehspiegelung".

#### 4.2.2 Klassifikation der Isometrien im $\mathbb{R}^3$

Sei  $\alpha : x \mapsto Ax + b$  eine Isometrie des  $\mathbb{R}^3$  und  $r = \text{rank}(A - E)$ ,  $r_e = \text{rank}(A - E, b)$ .  $f = f_A$  sei wieder die zugehörige lineare Abbildung.

Jetzt gilt  $0 \leq r \leq r_e \leq 3$  und  $r \leq r_e \leq r + 1$ . Wir haben daher folgende Fälle:

1.  $r = 0, r_e = 0$ : Das ist wieder die **identische Abbildung**.
2.  $r = 0, r_e = 1$ : **Translation**.
3.  $r = 1, r_e = 1$ :

In diesem Fall ist die Fixpunktmenge (d.h. die Lösungsmenge von  $(A - E)x = -b$ ) eine Ebene, und man sieht ähnlich wie im  $\mathbb{R}^2$ , dass es sich um eine **Spiegelung** an dieser Ebene handelt.

4.  $r = 1, r_e = 2$ :

In diesem Fall hat das System  $(A - E)x = o$  zwei linear unabhängige Lösungsvektoren  $v_1, v_2$ . Auf Grund des Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahrens können wir annehmen, dass  $\{v_1, v_2\}$  eine ONB des Lösungsraums ist. Diese ergänzen wir durch einen Vektor  $w$  zu einer ONB des  $\mathbb{R}^3$  und stellen  $b$  als diesbezügliche Linearkombination dar:  $b = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 w$ . Dann können wir  $\alpha$  als Zusammensetzung der folgenden beiden Abbildungen auffassen:

$$\begin{aligned}\alpha_1 : x &\mapsto Ax + \beta_3 w, \\ \alpha_2 : x &\mapsto x + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2\end{aligned}$$

und sehen ganz ähnlich wie im  $\mathbb{R}^2$ , dass  $\alpha_1$  eine Spiegelung an einer Ebene ist, deren Richtungsraum durch  $v_1$  und  $v_2$  aufgespannt wird.  $\alpha$  ist also Zusammensetzung einer Translation, wobei der Translationsvektor parallel zur Spiegelungsebene ist. Das nennen wir wieder eine **Gleitspiegelung**.

5.  $r = 2, r_e = 2$ :

In diesem Fall ist die Fixpunktmenge eine Gerade. Sei  $x = p + \lambda v$  die Parameterdarstellung dieser Geraden. Ergänzen wir  $v$  zu einer ONB  $(v, w_1, w_2)$ , so sehen wir, dass die Einschränkung der Abbildung  $f$  auf die durch  $w_1$  und  $w_2$  aufgespannte Ebene diese Ebene auf sich abbildet, und daraus ergibt sich (wie im  $\mathbb{R}^2$ ), dass die Matrix dieser Einschränkung bezüglich der Basis  $(w_1, w_2)$  die Form  $\begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}$  hat.

Wegen  $f(v) = v$  sieht die Matrix von  $f$  bezüglich  $(v, w_1, w_2)$  daher so aus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix},$$

das ist eine Drehung um die durch  $v$  erzeugte Gerade durch den Ursprung.

Die Abbildung  $\alpha$  lässt sich dann wieder so schreiben:

$$\alpha(x) = f(x - p) + p,$$

und daher nennt man das eine **Drehung** um die Gerade  $\{p + \lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$ . Diese Gerade heißt dann *Drehachse*.

6.  $r = 2, r_e = 3$ :

Die zugehörige lineare Abbildung  $f$  ist wie im vorigen Fall eine Drehung. Stellen wir  $b$  als Linearkombination von  $v, w_1, w_2$  dar,  $b = \beta_1 v + \beta_2 w_1 + \beta_3 w_2$ , so können wir  $\alpha$  als Zusammensetzung der folgenden beiden Abbildungen darstellen:

$$\begin{aligned} \alpha_1 : x &\mapsto f(x) + \beta_2 w_1 + \beta_3 w_2, \\ \alpha_2 : x &\mapsto x + \beta_1 v. \end{aligned}$$

$\alpha_1$  ist eine Drehung um eine Gerade mit Richtung  $v$ , denn bezüglich der ONB  $(v, w_1, w_2)$  sieht die erweiterte Matrix so aus:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma - 1 & -\sin \gamma & \beta_2 \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma - 1 & \beta_3 \end{pmatrix},$$

also gehört  $\alpha_1$  zum 5. Fall.  $\alpha$  ist somit die Zusammensetzung einer Drehung mit einer Translation in Richtung der Drehachse. So etwas nennt man eine **Schraubung**. Die zugehörige Drehachse heißt daher manchmal auch **Schraubachse**.

7.  $r = 3, r_e = 3$ :

Hier gibt es genau einen Fixpunkt  $p$ , und  $\alpha(x) = f(x - p) + p$ . Man kann nun zeigen, dass die Matrix  $A'$  von  $f$  bezüglich einer geeigneten ONB folgende Gestalt hat:

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}.$$

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix},$$

d.h.  $f$  ist die Zusammensetzung einer Drehung mit einer Spiegelung an einer zur Drehachse senkrechten Ebene. Man nennt daher  $\alpha$  in diesem Fall eine **Drehspiegelung**.

(*Beweisskizze*: Das charakteristische Polynom von  $A$  ist vom Grad 3, daher hat  $A$  mindestens einen reellen Eigenwert  $\lambda$ . Da  $A$  orthogonal ist, muss  $\lambda = \pm 1$  sein. Wäre  $\lambda = +1$ , so würde  $A - E$  Rang  $< 3$  haben. Also muss  $\lambda = -1$  sein. Sei  $v$  ein zugehöriger normierter Eigenvektor. Ergänzen wir diesen zu einer ONB des  $\mathbb{R}^3$ , so hat die diesbezügliche Matrix von  $f$  die oben angegebene Gestalt.)

Aus dieser Klassifikation ergeben sich wieder zwei Sätze:

**Satz 4.64** *Jede eigentliche Bewegung im  $\mathbb{R}^3$  ist eine Schraubung (eventuell mit Drehwinkel 0 oder Translationsvektor  $o$ ).*

Die Zusammensetzung zweier Schraubungen ist also immer wieder eine Schraubung, auch wenn die Schraubachsen verschieden sind (egal ob parallel oder nicht).

**Satz 4.65** *Jede uneigentliche Bewegung im  $\mathbb{R}^3$  ist eine Dreh- oder Gleitspiegelung (eventuell mit Drehwinkel 0 oder Translationsvektor  $o$ ).*

Zum Beispiel ist also die Zusammensetzung einer Schraubung mit einer beliebigen Spiegelung auch wieder eine Dreh- oder Gleitspiegelung. Es gibt somit keine eigene Klasse von "Schraubspiegelungen".

## 4.3 Quadriken (euklidisch)

### 4.3.1 Euklidische Koordinatentransformation quadratischer Formen

Unter einer *euklidischen Koordinatentransformation* verstehen wir den Übergang von einer Orthonormalbasis (ONB) zu einer anderen.

Seien also  $B$  und  $B'$  zwei Orthonormalbasen des  $\mathbb{R}^d$ . Dann gibt es eine bijektive lineare Abbildung, sagen wir  $f_R$ , welche  $B$  auf  $B'$  abbildet. Fassen wir  $B$  und  $B'$  als Matrizen auf, so gilt  $B' = RB$ . Da  $B$  und  $B'$  orthogonale Matrizen sind, ist auch  $R = B'B^{-1}$  eine orthogonale Matrix.

Wenn umgekehrt  $R$  eine beliebige orthogonale Matrix und  $B$  eine ONB ist, dann ist  $B' = RB$  ebenfalls eine ONB. Die orthogonalen Matrizen entsprechen also genau den euklidischen Koordinatentransformationen.

Betrachten wir nun eine quadratische Form  $G$  auf dem  $\mathbb{R}^d$ . Sei  $A$  die (symmetrische) Matrix von  $G$  bezüglich der Basis  $B$  und  $A'$  diejenige bezüglich  $B'$ . Dann gilt (siehe Kapitel 3.5.2)  $A' = R^T A R$ .

Wir haben in Kapitel 3.5.2 gesehen, dass es stets eine reguläre Matrix  $R$  gibt, sodass  $A' = R^T A R$  Diagonalgestalt hat. In Wirklichkeit gibt es aber (im  $\mathbb{R}^d$ ) sogar eine *orthogonale* Matrix  $R$  mit dieser Eigenschaft. Das ergibt sich aus dem folgenden Satz der Linearen Algebra (siehe Vorlesungen oder Bücher über Lineare Algebra.)

**Satz 4.66** *Zu jeder reellen symmetrischen Matrix  $A$  gibt es eine orthogonale Matrix  $R$ , sodass  $D := R^{-1} A R = R^T A R$  eine Diagonalmatrix ist. In den Diagonalen von  $D$  stehen dann die Eigenwerte von  $A$ .*

Man kann diesen Satz auch so ausdrücken: *Jede symmetrische Matrix ist zu einer Diagonalmatrix orthogonal ähnlich.*

Daraus folgt nun:

**Satz 4.67** *Zu jeder quadratischen Form  $G$  auf dem  $\mathbb{R}^d$  gibt es eine Orthonormalbasis  $B$ , sodass*

$$G(x) = x_B^T D x_B$$

*mit einer Diagonalmatrix  $D$ .*

Bezeichnen wir die Koordinaten von  $x$  bezüglich  $B$  einfach mit  $x_i$ , so gilt also

$$G(x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_d x_d^2,$$

mit gewissen reellen Zahlen  $\lambda_i$ , welche die Eigenwerte der Matrix von  $G$  sind.

Die Spaltenvektoren der Transformationsmatrix  $R$  bilden eine ONB des  $\mathbb{R}^d$ , welche aus Eigenvektoren der gegebenen Matrix  $A$  bestehen. Das ergibt eine Möglichkeit der Berechnung von  $R$ : Man bestimmt zunächst die Eigenwerte von  $A$ , dann zu jedem Eigenwert eine Basis des zugehörigen Eigenraums, und schließlich orthonormalisiert man jede dieser Basen und fügt sie dann zu einer Basis des  $\mathbb{R}^d$  zusammen. Natürlich ist das im Allgemeinen recht aufwendig. (Beispiele: siehe Vorlesungen oder Bücher über Lineare Algebra.)

### 4.3.2 Euklidische Normalform der Quadriken

Ganz analog zu Satz 3.186 kann man jetzt zeigen:

**Satz 4.68** *Im  $\mathbb{R}^d$  gibt es zu jeder Quadrik  $Q$  eine Bewegung  $\beta$ , sodass die Gleichung von  $\beta(Q)$  einem der folgenden drei **Normalformentypen** angehört:*

- (1)  $\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_{r-1} x_{r-1}^2 + x_r^2 = 0$
- (2)  $\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2 + 1 = 0$
- (3)  $\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2 + 2x_{r+1} = 0$

Dabei ist  $r$  ist der Rang der entsprechenden Matrix. Die Gleichung von  $\beta(Q)$  nennt man dann **euklidische Normalform** (von  $Q$ ).

*Bemerkung:* Man kann zusätzlich fordern, dass die  $\lambda_i$  der Größe nach geordnet sind, also z.B.  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r$ .

Der *Beweis* verläuft weitgehend analog zu der affinen Normalform (Satz 3.186), nur dass man den vorhergehenden Satz 4.67 an Stelle von Satz 3.177 verwendet. Damit kommt man zunächst auf folgende Gleichungsform:

$$\lambda_1 x_1'^2 + \dots + \lambda_r x_r'^2 + b'_{r+1} x_{r+1}' + \dots + b'_d x_d' + c' = 0$$

mit  $\lambda_i \neq 0$  für alle  $i \in \{1, \dots, r\}$ . Jetzt unterscheidet man wieder drei Fälle:

1. Fall:  $b'_{r+1} = \dots = b'_d = c' = 0$ .

In diesem Fall ergibt Division durch  $\lambda_r$  eine Gleichung vom Typ (1).

2. Fall:  $b'_{r+1} = \dots = b'_d = 0$ , aber  $c' \neq 0$ .

Hier ergibt Division durch  $c'$  eine Gleichung vom Typ (2).

3. Fall: Es gibt einen Index  $i_0$  mit  $r < i_0 \leq d$ , sodass  $b'_{i_0} \neq 0$ .

Nur in diesem Fall ist eine zusätzliche Überlegung notwendig. O.B.d.A. können wir wieder annehmen, dass  $i_0 = r + 1$  ist. Sei  $b' := (b'_1, \dots, b'_d)^T = (0, \dots, 0, b'_{r+1}, \dots, b'_d)^T$ . Dieser Vektor ist orthogonal zu  $e_1, \dots, e_r$ , und  $(e_1, \dots, e_r, b', e_{r+2}, \dots, e_d)$  ist eine Basis des  $\mathbb{R}^d$ . Wenden wir darauf das Schmidt'sche ON-Verfahren an, so erhalten wir eine ONB

$$B'' = (e_1, \dots, e_r, b'', v_{r+2}, \dots, v_d) \text{ mit } b'' = \frac{1}{\|b'\|} b'.$$

Identifizieren wir diese Basis wieder mit der entsprechenden orthogonalen Matrix, so entspricht die Substitution

$$x'' = B''^T x' + \frac{1}{\|b'\|} c' e_{r+1}$$

einer Bewegung, und es gilt

$$\begin{aligned} x''_i &= x'_i \text{ für } i = 1, \dots, r, \\ x''_{r+1} &= b''_{r+1} x'_{r+1} + \dots + b''_d x'_d + \frac{1}{\|b'\|} c' = \frac{1}{\|b'\|} (b'_{r+1} x'_{r+1} + \dots + b'_d x'_d + c'). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich folgende Gleichung der Quadrik:

$$\lambda_1 x''_1^2 + \dots + \lambda_r x''_r^2 + \|b'\| x''_{r+1} = 0.$$

Jetzt brauchen wir nur noch mit  $\frac{2}{\|b'\|}$  multiplizieren und erhalten die Normalform vom Typ(3).  $\square$

*Bemerkungen:*

1. Da man die Gleichung einer Quadrik mit einem beliebigen Skalar  $\neq 0$  multiplizieren kann, ergibt sich, dass die Koeffizienten  $\lambda_i$  nur bis auf einen gemeinsamen Faktor  $\neq 0$  die von Null verschiedenen Eigenwerte der zugehörigen Matrix sind. Der Faktor 2 bei Typ (3) beruht nur auf einer üblichen Konvention. Man könnte genauso gut 1 oder sonst einen Faktor  $\neq 0$  erreichen.
2. Die Bewegung  $\beta$  in obigem Satz ist im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. So kann man z.B. auf einen Kreis im  $\mathbb{R}^2$  mit Mittelpunkt  $(0, 0)$  eine

beliebige Drehung um den Ursprung anwenden, und erhält immer wieder denselben Kreis.

*Beispiel:*

Sei  $Q$  die Quadrik im  $\mathbb{R}^2$  mit Gleichung  $x_1 x_2 = 1$ . Die zugehörige Matrix ist  $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ .

Die Eigenwerte von  $A$  erhalten wir durch Lösung der Gleichung  $\det(A - \lambda E) = 0$ , das heißt  $\lambda^2 - \frac{1}{4} = 0$ . Die beiden Eigenwerte sind also  $\lambda_1 = \frac{1}{2}$  und  $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ .

Die zugehörigen Eigenvektoren ergeben sich durch Lösung des Gleichungssystems  $(A - \lambda_1 E)x = o$  bzw.  $(A - \lambda_2 E)x = o$ . Man erhält z.B.  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Durch Normierung dieser Vektoren erhalten wir die folgende orthogonale Transformationsmatrix:

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Anwendung dieser Transformation (das ist eine Drehung um  $45^\circ$ ) liefert

$$R^T A R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten damit folgende euklidische Normalform von  $Q$ :  $\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 = 1$ . Es handelt sich also um eine Hyperbel.

### 4.3.3 Hauptachsen und Scheitel

Die Geraden  $\text{lin}\{e_i\}$  im  $\mathbb{R}^d$  heißen **Koordinatenachsen**. In Bezug auf eine Quadrik in Normalform haben sie eine besondere Bedeutung.

**Definition 4.69** *Sei  $\beta$  eine Bewegung, sodass die Gleichung von  $\beta(Q)$  euklidische Normalform besitzt. Eine Gerade  $H$  heißt **Hauptachse** von  $Q$ , wenn  $\beta(H)$  mit einer Koordinatenachse übereinstimmt. Jede solche Transformation  $\beta$  nennt man daher auch **Hauptachsentransformation**.*

Wenn also die Gleichung von  $Q$  bereits Normalform hat, dann sind alle Koordinatenachsen Hauptachsen von  $Q$ . Wegen der Nicht-Eindeutigkeit der Transformation auf Normalform kann es aber noch weitere Hauptachsen geben. So ist z.B. bei einem Kreis mit Mittelpunkt im Ursprung jede durch den Ursprung gehende Gerade eine Hauptachse.

In obigem Beispiel mit der Gleichung  $x_1x_2 = 1$  sind die Geraden mit Gleichungen  $x_2 = x_1$  und  $x_2 = -x_1$  Hauptachsen, da sie bei der Drehung um  $45^\circ$  in die Koordinatenachsen übergehen.

Wenn  $Q$  eine Mittelpunktsquadrik ist, so gehen alle Hauptachsen von  $Q$  durch den (bzw. einen) Mittelpunkt von  $Q$  (vgl. Bemerkung 3.190).

**Definition 4.70** *Sei  $Q$  eine Quadrik mit euklidischer Normalform vom Typ (2) oder (3). Dann heißen die Schnittpunkte der Hauptachsen von  $Q$  mit  $Q$  **Scheitel** von  $Q$ .*

(Unter "Schnittpunkt" verstehen wir hier einfach ein Element des Durchschnitts.)

Nehmen wir an, dass die Gleichung von  $Q$  bereits in Normalform vorliegt, und sehen uns Typ (2) und (3) genauer an:

*Typ (2):*

Wir können annehmen, dass die Nummerierung so gewählt ist, dass  $\lambda_1, \dots, \lambda_p > 0$  und  $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_r < 0$ . Versuchen wir nun, eine Hauptachse  $\text{lin}\{e_i\} = \{\mu e_i : \mu \in \mathbb{R}\}$  mit  $Q$  zu schneiden. Das heißt, wir suchen ein  $\mu \in \mathbb{R}$ , sodass  $\lambda_i \mu^2 + 1 = 0$ . Offensichtlich gibt es für  $\lambda_i > 0$  kein solches  $\mu$ , dagegen erhalten wir für  $\lambda_i < 0$  die Lösungen  $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}}$ , also genau zwei Schnittpunkte.

Es gibt in diesem Fall also (mindestens)  $2(r-p)$  Scheitel. Die Hauptachsen mit  $i > r$  haben keine Schnittpunkte mit  $Q$ : die Gleichung für  $\mu$  lautet dann ja  $0\mu^2 + 1 = 0$ .

*Konkretes Beispiel:*

Betrachten wir etwa die Hyperbel mit Gleichung  $x_1^2 - 3x_2^2 + 1 = 0$ . Diese besitzt genau zwei Scheitel, und zwar  $(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$  und  $(0, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ .

*Typ (3):*

Versuchen wir wieder,  $\text{lin}\{e_i\}$  mit  $Q$  zu schneiden, so kommen wir für  $i \leq r$  auf  $\lambda_i \mu^2 = 0$  und somit auf  $\mu = 0$ . Für  $i = r+1$  erhalten wir  $2\mu = 0$ , und somit ebenfalls  $\mu = 0$ . In diesem Fall ist also sicher der Ursprung ein

Scheitel. Wenn  $r+1 < d$  ist, dann gibt es Hauptachsen  $\text{lin}\{e_i\}$  mit  $i > r+1$ . Diese sind aber ganz in  $Q$  enthalten, haben also keinen Schnittpunkt mit  $Q$  im eigentlichen Sinn.

*Konkretes Beispiel:*

Sei  $Q$  der parabolische Zylinder im  $\mathbb{R}^3$  mit Gleichung  $x_1^2 + x_2 = 0$ . Die ersten beiden Koordinatenachsen schneiden  $Q$  im Ursprung, und die dritte ist in  $Q$  enthalten (siehe Abbildung Seite 136). Da sich die Gleichung von  $Q$  bei einer Translation in Richtung der dritten Koordinatenachse nicht ändert, sind alle Punkte der  $x_3$ -Achse Scheitel.

**Bemerkung 4.71** Häufig schreibt man bei der euklidischen Normalform von Mittelpunktsquadriken die positiven Koeffizienten  $\lambda_i$  in der Form  $\frac{1}{a_i^2}$  und die negativen in der Form  $-\frac{1}{a_i^2}$ , also für  $\lambda_1, \dots, \lambda_p > 0$  und  $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_r < 0$ :

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_p^2}{a_p^2} - \frac{x_{p+1}^2}{a_{p+1}^2} - \dots - \frac{x_r^2}{a_r^2} + 1 = 0.$$

Dann sind die Punkte  $\pm a_i e_i$  für  $p+1 \leq i \leq r$  Scheitel. Die Strecken  $[-a_i e_i, a_i e_i]$  nennt man dann auch oft **"Hauptachsen"**, und die Längen dieser Strecken daher **"Längen der Hauptachsen"**.

## 4.4 Kugeln und Sphären

### 4.4.1 Definition

Der Begriff "Kugel" wurde bereits in Abschnitt 3.4.1 erklärt. Oft versteht man unter "Kugel" jedoch das, was wir folgenderweise definieren:

**Definition 4.72** Sei  $m \in \mathbb{R}^d$  und  $r > 0$ . Dann heißt die Menge

$$S(m, r) := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - m\| = r\}$$

die **Sphäre** oder **Kugelfläche** mit Mittelpunkt  $m$  und Radius  $r$ . Für  $d = 2$  sagt man statt Sphäre auch **Kreis**, genauer **Kreislinie**.

$S(m, r)$  ist natürlich nichts anderes als der Rand der entsprechenden offenen oder abgeschlossenen Kugel  $K(m, r)$  bzw.  $\overline{K}(m, r)$ , die man zur besseren Unterscheidung auch **Vollkugel** nennt.

$S(m, r)$  ist also durch die Gleichung  $\|x - m\| = r$  gegeben. Quadrieren wir diese Gleichung, so erhalten wir, ausführlich geschrieben,

$$(x_1 - m_1)^2 + \dots + (x_d - m_d)^2 = r^2.$$

Wenden wir darauf die Translation  $x \mapsto x - m$  an und dividieren wir durch  $r^2$ , so erhalten wir im Wesentlichen die euklidische Normalform:

$$\frac{x_1^2}{r^2} + \dots + \frac{x_d^2}{r^2} = 1.$$

Wir sehen also, dass  $m$  auch im Sinne der Definition 3.189 Mittelpunkt von  $S(m, r)$  ist (vgl. Bemerkung 3.190). Es gibt hier keine eindeutig bestimmten Hauptachsen: jede Gerade durch den Mittelpunkt ist eine Hauptachse. Die Längen der Hauptachsen sind alle gleich  $2r$ .

#### 4.4.2 Potenz eines Punktes in Bezug auf eine Kugel oder Sphäre

**Definition 4.73** Unter der **Potenz** (engl. **power**) des Punktes  $x$  in Bezug auf die Kugel  $K(m, r)$  oder die Sphäre  $S(m, r)$  versteht man die Zahl

$$P(x; m, r) := \|x - m\|^2 - r^2.$$

Anschaulich kann man sich die Potenz eines Punktes, der außerhalb der Kugel liegt, als Quadrat der Länge einer Tangente von dem Punkt an die Kugel vorstellen.

Jedenfalls gilt

$$P(x; m, r) \begin{cases} > 0 & \text{für } x \notin \overline{K}(m, r), \\ = 0 & \text{für } x \in S(m, r), \\ < 0 & \text{für } x \in K(m, r). \end{cases}$$

Überlegen wir uns, wie die Menge aller Punkte aussieht, die in Bezug auf zwei gegebene Kugeln  $K(m, r)$  und  $K(m', r')$  die gleiche Potenz haben:

$$\|x - m\|^2 - r^2 = \|x - m'\|^2 - r'^2$$

ist gleichbedeutend mit

$$\|x\|^2 - 2x \cdot m + \|m\|^2 - r^2 = \|x\|^2 - 2x \cdot m' + \|m'\|^2 - r'^2.$$

Hier können wir auf beiden Seiten  $\|x\|^2$  subtrahieren und erhalten nach einfacher Umformung

$$2(m' - m) \cdot x = (\|m'\|^2 - r'^2) - (\|m\|^2 - r^2). \quad (4.1)$$

Das ist für  $m \neq m'$  die Gleichung einer Hyperebene.

**Definition 4.74** Seien  $K(m, r)$  und  $K(m', r')$  zwei Kugeln mit  $m \neq m'$ . Dann heißt die Hyperebene mit Gleichung

$$P(x; m, r) = P(x; m', r')$$

die **Potenzhyperebene** von  $K(m, r)$  und  $K(m', r')$ . (Für  $d = 2$  sagt man natürlich **Potenzgerade**, für  $d = 3$  **Potenzebene**.)

Die Potenzgerade von zwei einander schneidenden Kreisen ist offensichtlich die Verbindungsgerade der beiden Schnittpunkte. Die Potenzebene von zwei einander schneidenden Kugelflächen im  $\mathbb{R}^3$  ist die Ebene, die durch den Schnittkreis bestimmt ist.

Sehen wir uns nun allgemeiner die Menge aller Punkte an, die in Bezug auf mehrerer Kugeln gleiche Potenz haben:

**Satz 4.75** Seien  $K(m_1, r_1), \dots, K(m_n, r_n)$  Kugeln im  $\mathbb{R}^d$  mit affin unabhängigen Mittelpunkten  $m_1, \dots, m_n$ . Dann ist die Menge aller Punkte, die in Bezug auf diese Kugeln gleiche Potenz haben, ein  $(d - n + 1)$ -dimensionaler affiner Teilraum des  $\mathbb{R}^d$ .

*Beweis:* Die betrachtete Menge ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} P(x; m_2, r_2) &= P(x; m_1, r_1) \\ &\vdots \\ P(x; m_n, r_n) &= P(x; m_1, r_1) \end{aligned}$$

Wie vorhin können wir bei jeder Gleichung  $\|x\|^2$  subtrahieren und erhalten dadurch ein lineares Gleichungssystem mit  $n - 1$  Gleichungen und  $d$  Unbekannten. Die Zeilenvektoren der Matrix dieses Gleichungssystems sind  $m_2 - m_1, \dots, m_n - m_1$ . Diese sind genau dann linear unabhängig, wenn die Punkte  $m_1, \dots, m_n$  affin unabhängig sind, und in diesem Fall ist der Rang

der Matrix gleich  $n - 1$ . Folglich ist die Dimension des Lösungsraums gleich  $d - (n - 1)$ , was zu zeigen war.  $\square$

Speziell gibt es also zu  $d+1$  Kugeln im  $\mathbb{R}^d$ , deren Mittelpunkte nicht auf einer Hyperebene liegen, genau einen Punkt, der in Bezug auf alle Kugeln dieselbe Potenz hat. Diesen Punkt nennt man das *Potenzzentrum* der betrachteten Kugeln.

#### 4.4.3 Dirichlet- und Voronoi-Zellen

**Definition 4.76** Seien  $K(m_1, r_1), \dots, K(m_n, r_n)$  Kugeln im  $\mathbb{R}^d$  mit paarweise verschiedenen Mittelpunkten. Dann versteht man unter der **Dirichlet-Zelle** einer dieser Kugeln die Menge aller Punkte, deren Potenz in Bezug auf diese Kugel kleiner oder gleich der Potenz in Bezug auf alle anderen Kugeln ist.

Für die Dirichlet-Zelle  $D_{i_0}$  von  $K(m_{i_0}, r_{i_0})$  gilt also:

$$D_{i_0} = \{x \in \mathbb{R}^d : P(x; m_{i_0}, r_{i_0}) \leq P(x; m_i, r_i) \text{ für alle } i \neq i_0\}.$$

(Peter Gustav Lejeune *Dirichlet* (1805-1859) gilt unter anderem als Begründer der analytischen Zahlentheorie. Er betrachtete die nach ihm benannten Zellen für den Spezialfall von gleich großen Kugeln, deren Mittelpunkte git-terförmig angeordnet sind.)

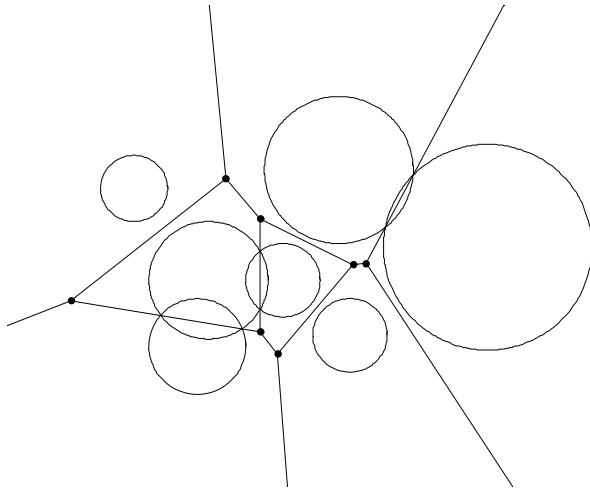
**Satz 4.77** Die Dirichlet-Zellen von  $n$  Kugeln im  $\mathbb{R}^d$  sind konvexe polyedrische Mengen, deren Vereinigung der ganze  $\mathbb{R}^d$  ist. Je zwei dieser Zellen haben keine inneren Punkte gemeinsam.

*Beweis:*

- a) Ähnlich wie vorhin (siehe Gleichung (4.1)) sehen wir, dass die Ungleichung  $P(x; m_{i_0}, r_{i_0}) \leq P(x; m_i, r_i)$  zu  $2(m_i - m_{i_0}) \cdot x \leq \|m_i\|^2 - r_i^2 - \|m_{i_0}\|^2 + r_{i_0}^2$  äquivalent ist. Sie beschreibt also einen abgeschlossenen Halbraum, der durch die Potenzhyperebene von  $K(m_{i_0}, r_{i_0})$  und  $K(m_i, r_i)$  begrenzt ist. Die Zelle  $D_{i_0}$  ist der Durchschnitt dieser Halbräume.
- b) Sei  $x$  ein beliebiger Punkt des  $\mathbb{R}^d$ . Dann gehört  $x$  zu der Dirichlet-Zelle der Kugel, bezüglich welcher  $x$  die kleinste Potenz hat. Also gehört jeder Punkt des  $\mathbb{R}^d$  zu mindestens einer Zelle.

c) Angenommen,  $x$  wäre innerer Punkt zweier Zellen  $D_{i_1}$  und  $D_{i_2}$ . Dann würde  $x$  in jedem der entsprechenden offenen Halbräume liegen. Es würde also insbesondere  $P(x; m_{i_1}, r_{i_1}) < P(x; m_{i_2}, r_{i_2})$  und  $P(x; m_{i_2}, r_{i_2}) < P(x; m_{i_1}, r_{i_1})$  gelten, und das ist ein Widerspruch.  $\square$

Den Inhalt des letzten Satzes drückt man auch so aus: Die Dirichlet-Zellen von  $n$  Kugeln im  $\mathbb{R}^d$  bilden eine *polyedrische Pflasterung* des  $\mathbb{R}^d$ .



**Bemerkung 4.78** Sei  $\mathcal{K}$  eine endliche Menge von (abgeschlossenen) Kugeln, welche paarweise keine inneren Punkte gemeinsam haben. Dann ist jede dieser Kugeln in ihrer Dirichlet-Zelle enthalten.

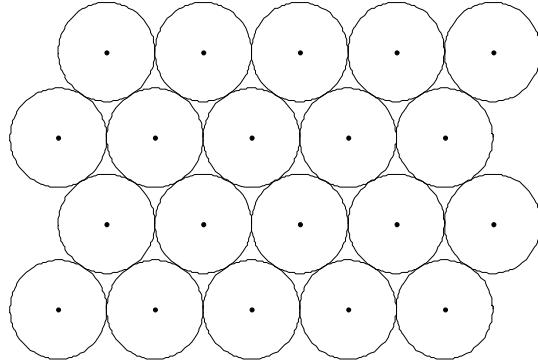
*Beweis:* Sei  $\overline{K}(m_{i_0}, r_{i_0}) \in \mathcal{K}$  und  $x \in \overline{K}(m_{i_0}, r_{i_0})$ . Dann ist  $P(x; m_{i_0}, r_{i_0}) \leq 0 \leq P(x; m_i, r_i)$  für alle  $i \neq i_0$  und somit  $x \in D_{i_0}$ .  $\square$

Auf Grund dieser Bemerkung können Dirichlet-Zellen in sinnvoller Weise zum Studium von Kugelpackungen verwendet werden. Eine *Kugelpackung* ist eine Menge von Kugeln (im  $\mathbb{R}^d$ ), welche paarweise keine inneren Punkte gemeinsam haben. Eine besonders interessante Frage ist hier die nach der größtmöglichen Dichte einer Packung von (unendlich vielen) gleich großen Kugeln. Unter *Dichte* versteht man dabei, grob gesagt, den Anteil des Raumes, der durch die Kugeln überdeckt wird. Eine genaue Definition der (oberen) Dichte  $\delta$  einer (abzählbaren) Menge  $\{K_1, K_2, \dots\}$  von Kugeln lautet

$$\delta = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sum_{K_i \cap K(o, R) \neq \emptyset} V(K_i)}{V(K(o, R))}.$$

Für  $d = 2$  wird die größte Dichte einer Packung von gleich großen Kreisen erreicht, wenn die Kreismittelpunkte ein reguläres Dreiecksgitter bilden. (Das

wurde zum ersten Mal von A. Thue 1910 bewiesen.) Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt einer solchen Packung.



Für  $d = 3$  ist lange Zeit verschiedener Mathematiker (wobei insbesondere *László Fejes Tóth* zu nennen ist) versucht, die naheliegende Vermutung zu beweisen, dass die größte Dichte von Packungen gleich großer Kugeln erreicht wird, wenn man "ebene Schichten" von Kugeln bildet, die der obigen dichtesten Kreispackung entsprechen, und sie so übereinanderlegt, dass jede Kugel drei Kugeln der vorhergehenden Schicht berührt. 1997/ 1998 haben *Thomas Hales* und *Samuel Ferguson* einen umfangreichen computergestützten Beweis dieser Vermutung angekündigt. Es scheint derzeit noch nicht endgültig klar zu sein, ob es sich tatsächlich um einen voll gültigen Beweis handelt.

Für  $d > 3$  ist das Problem der dichtesten Kugelpackung nach wie vor offen. (Nur gewisse Spezialfälle sind gelöst.)

**Definition 4.79** *Sei  $\mathcal{K}$  eine (endliche) Menge von Kugeln im  $\mathbb{R}^d$ , welche paarweise verschiedene Mittelpunkte haben. Dann heißt die Gesamtheit der Dirichlet-Zellen dieser Kugeln (eventuell zusammen mit allen Seiten der Zellen) das **Potenzdiagramm** (engl. **power diagram**) von  $\mathcal{K}$ .*

Wenn alle Kugeln gleichen Radius  $r$  haben, dann sind die Dirichlet'schen Zellen unabhängig von diesem Radius:  $P(x; m_{i_0}, r) \leq P(x; m_i, r)$  heißt ja  $\|x - m_{i_0}\|^2 - r^2 \leq \|x - m_i\|^2 - r^2$ , und das ist gleichbedeutend mit  $\|x - m_{i_0}\| \leq \|x - m_i\|$ . Das führt zu folgendem Begriff:

**Definition 4.80** *Seien  $m_1, \dots, m_n$  paarweise verschiedene Punkte im  $\mathbb{R}^d$ . Dann versteht man unter der **Voronoi-Zelle** von  $m_{i_0}$  die Menge aller Punkte*

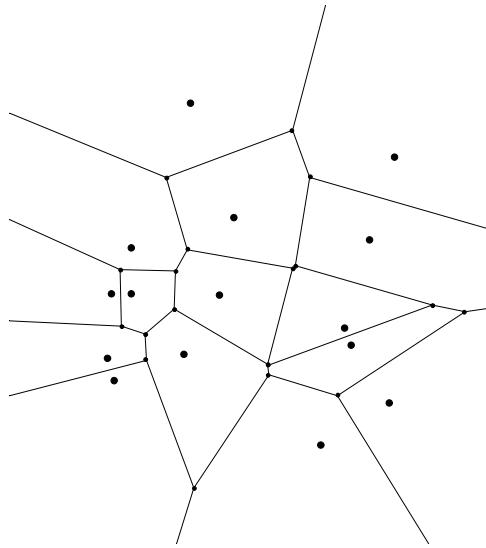
des  $\mathbb{R}^d$ , deren Abstand von  $m_{i_0}$  kleiner oder gleich dem Abstand von den anderen  $m_i$  ist. Die Gesamtheit der Voronoi-Zellen von  $n$  Punkten im  $\mathbb{R}^d$  (eventuell zusammen mit allen Seiten der Zellen) heißt das **Voronoi-Diagramm** dieser Punkte.

Für die Voronoi-Zelle  $V_{i_0}$  von  $m_{i_0}$  gilt somit:

$$V_{i_0} = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - m_{i_0}\| \leq \|x - m_i\| \text{ für alle } i \neq i_0\}.$$

Die Dirichlet-Zellen der Kugeln mit Mittelpunkten  $m_1, \dots, m_n$  stimmen also mit den Voronoi-Zellen der Mittelpunkte überein, wenn alle Kugeln gleichen Radius haben.

(Georgij Feodos'evitsch Voronoi (1868-1908, St. Petersburg, Warschau) kam ähnlich wie Dirichlet durch die Beschäftigung mit zahlentheoretischen Fragen auf diese Zellen.)



Voronoi-Diagramme sind für verschiedenste Anwendungsbereiche von Bedeutung und haben dementsprechend auch verschiedene Namen. In der Kristallographie heißen sie z.B. "Wirkungsbereiche", in der Metallurgie "Wigner-Seitz-Zonen" und in der Geographie "Thiessen-Polygone". In neuerer Zeit sind sie besonders für Anwendungen in der Computergeometrie relevant geworden. Zum Beispiel können Voronoi-Diagramme für "schnelle" Algorithmen verwendet werden, die aus einer größeren Anzahl von Punkten denjenigen heraus suchen, der am nächsten bei einer bestimmten Stelle liegt (etwa bei der Cursorposition).

#### 4.4.4 Die stereographische Projektion

In der Kartographie werden verschiedene Projektionsmethoden verwendet, um mehr oder weniger große Teile der Erdoberfläche möglichst gut auf eine Ebene abzubilden. Eine davon ist die stereographische Projektion, die auch innerhalb der Mathematik von besonderem Interesse ist.

Sei  $S^d := S(o, 1)$  die Einheitssphäre im  $\mathbb{R}^{d+1}$ . (Die Bezeichnung hängt damit zusammen, dass man  $S^d$  als eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ansehen kann.)

Den Punkt  $e_{d+1} = (0, 0, \dots, 1) \in S^d$  nennen wir auch *Nordpol*.

Die stereographische Projektion ist nun eine bijektive Abbildung

$$S^d \setminus \{e_{d+1}\} \rightarrow \mathbb{R}^d,$$

bei der zunächst jeder Punkt  $p \in S^d \setminus \{e_{d+1}\}$  auf den Schnittpunkt der Geraden  $e_{d+1} \vee p$  mit der Hyperebene

$$\tilde{\mathbb{R}}^d := \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : x_{d+1} = 0\}$$

abgebildet wird, und dann wird die letzte Koordinate weggelassen.

Die stereographische Projektion lässt sich in natürlicher Weise auf alle Punkte des  $\mathbb{R}^{d+1}$  mit  $x_{d+1} \neq 1$  fortsetzen, wobei allerdings die Bijektivität verloren geht. Diese Fortsetzung heißt Zentralprojektion.

#### Die Zentralprojektion von $e_{d+1}$ auf den $\mathbb{R}^d$

**Definition 4.81** *Die folgende Abbildung heißt **Zentralprojektion** (von  $e_{d+1}$  auf den  $\mathbb{R}^d$ ):*

$$\pi : \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : x_{d+1} \neq 1\} \rightarrow \mathbb{R}^d : x \mapsto \frac{1}{1 - x_{d+1}} x',$$

wobei  $x'$  der Punkt ist, der aus  $x$  durch Weglassung der letzten Koordinate entsteht.

Wenn also  $x = (x_1, \dots, x_d, x_{d+1})$ , dann ist  $x' = (x_1, \dots, x_d)$ . Wir schreiben dann auch  $x = (x', x_{d+1})$ .

Überlegen wir uns, dass die so definierte Zentralprojektion wirklich die vorher beschriebene Eigenschaft hat. Wir haben also zu zeigen, dass für jedes  $x \in$

$\mathbb{R}^{d+1}$  mit  $x_{d+1} \neq 1$  die drei Punkte  $e_{d+1}$ ,  $x$  und  $y := \frac{1}{1-x_{d+1}}(x', 0)$  auf einer Geraden liegen. Das ist aber sehr einfach, denn es gilt

$$(1 - x_{d+1})y = (x', 0) = (x', x_{d+1}) - (o, x_{d+1}) = x - x_{d+1}e_{d+1},$$

das heißt

$$x = (1 - x_{d+1})y + x_{d+1}e_{d+1}.$$

$x$  liegt also auf der Verbindungsgeraden von  $y$  und  $e_{d+1}$ .

Das, was hier definiert wurde, ist ein Spezialfall des allgemeinen Begriffs *Zentralprojektion*, der sinnvollerweise im Rahmen der projektiven Geometrie behandelt wird.

Die Zentralprojektion wird häufig verwendet, um Bilder von dreidimensionalen Objekten zu erzeugen, die der natürlichen Wahrnehmung mit dem Auge sehr ähnlich sein können. Diese Abbildungsmethode entspricht der in der Darstellenden Geometrie und Darstellenden Kunst häufig verwendeten *Persepektive*.

Die Zentralprojektion ist keine affine Abbildung. Für die Einschränkung auf den durch  $x_{d+1} < 1$  definierten Halbraum gilt trotzdem folgender Satz.

**Satz 4.82** *Sei  $\pi$  die Zentralprojektion von  $e_{d+1}$  auf den  $\mathbb{R}^d$ , und  $p_1, \dots, p_n \in \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : x_{d+1} < 1\}$ . Dann ist das  $\pi$ -Bild jeder Konvexitätskombination dieser Punkte eine Konvexitätskombination von  $\pi(p_1), \dots, \pi(p_n)$ .*

(Das ist ein Analogon zu Bemerkung 3.73, allerdings mit der Einschränkung, dass die Koeffizienten der Bildpunkte im Allgemeinen von den ursprünglichen Koeffizienten verschieden sind.)

*Beweis:* Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$  und  $\sum \lambda_i = 1$ . Dann gilt

$$\pi \left( \sum \lambda_i p_i \right) = \frac{1}{1 - \sum \lambda_i p_{i,d+1}} \sum \lambda_i p'_i = \sum \mu_i \left( \frac{1}{1 - p_{i,d+1}} p'_i \right) = \sum \mu_i \pi(p_i)$$

mit

$$\mu_i := \frac{\lambda_i (1 - p_{i,d+1})}{1 - \sum \lambda_i p_{i,d+1}}.$$

Wir haben also nur zu zeigen:  $\mu_i \geq 0$  und  $\sum \mu_i = 1$ .

Nach Voraussetzung ist  $p_{i,d+1} < 1$ . Daraus folgt  $1 - p_{i,d+1} > 0$  und  $\sum \lambda_i p_{i,d+1} < 1$ , also  $\mu_i \geq 0$ .

$$\sum \mu_i = \frac{1}{1 - \sum \lambda_i p_{i,d+1}} \sum \lambda_i (1 - p_{i,d+1}) = \frac{1}{1 - \sum \lambda_i p_{i,d+1}} (\sum \lambda_i - \sum \lambda_i p_{i,d+1}) = 1,$$

da ja  $\sum \lambda_i = 1$ .  $\square$

**Satz 4.83** Sei  $\pi$  die Zentralprojektion von  $e_{d+1}$  auf den  $\mathbb{R}^d$ , und  $S \subset \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : x_{d+1} < 1\}$ . Dann gilt:

$$\pi(\text{conv } S) = \text{conv } \pi(S).$$

*Beweis:*

Auf Grund des vorigen Satzes ist  $\pi(\text{conv } S) \subset \text{conv } \pi(S)$ . Für die umgekehrte Inklusion genügt es, zu zeigen, dass das  $\pi$ -Bild jeder konvexen Teilmenge von  $\{x \in \mathbb{R}^{d+1} : x_{d+1} < 1\}$  konvex ist. Dann folgt nämlich, dass  $\pi(\text{conv } S)$  konvex ist, und wegen  $\pi(S) \subset \pi(\text{conv } S)$  können wir daraus schließen:  $\text{conv } \pi(S) \subset \pi(\text{conv } S)$ .

Seien also  $p$  und  $q$  zwei Punkte einer konvexen Teilmenge  $C$  von  $\{x \in \mathbb{R}^{d+1} : x_{d+1} < 1\}$ , und  $\mu \in [0, 1]$ . Wir haben zu zeigen, dass  $(1 - \mu)\pi(p) + \mu\pi(q) \in \pi(C)$ . Es genügt zu zeigen, dass es ein  $\lambda \in [0, 1]$  gibt, sodass

$$(1 - \mu)\pi(p) + \mu\pi(q) = \pi((1 - \lambda)p + \lambda q),$$

das heißt

$$(1 - \mu)\frac{1}{1 - p_{d+1}}p' + \mu\frac{1}{1 - q_{d+1}}q' = \frac{1}{1 - (1 - \lambda)p_{d+1} - \lambda q_{d+1}}((1 - \lambda)p' + \lambda q').$$

Es genügt daher, ein  $\lambda \in [0, 1]$  zu finden, sodass folgende zwei Gleichungen erfüllt sind:

$$\frac{1 - \mu}{1 - p_{d+1}} = \frac{1 - \lambda}{1 - (1 - \lambda)p_{d+1} - \lambda q_{d+1}}$$

$$\frac{\mu}{1 - q_{d+1}} = \frac{\lambda}{1 - (1 - \lambda)p_{d+1} - \lambda q_{d+1}}$$

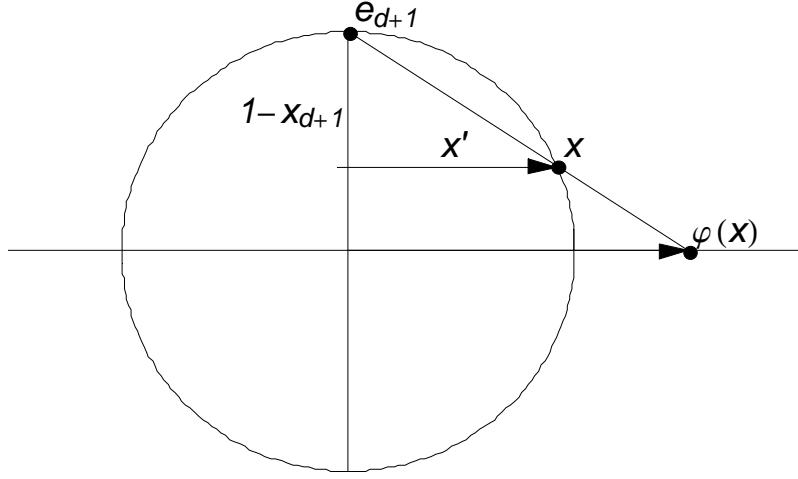
Multiplizieren wir jede dieser Gleichungen mit dem Produkt der beiden entsprechenden Nenner, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} (1 - \mu)(1 - (1 - \lambda)p_{d+1} - \lambda q_{d+1}) &= (1 - \lambda)(1 - p_{d+1}) \\ \mu(1 - (1 - \lambda)p_{d+1} - \lambda q_{d+1}) &= \lambda(1 - q_{d+1}) \end{aligned}$$

Das sind zwei lineare Gleichungen in  $\lambda$ , und beide haben dieselbe Lösung  $\lambda = \mu \frac{1 - p_{d+1}}{1 - (\mu p_{d+1} + (1 - \mu)q_{d+1})}$ . Es ist also nur noch zu zeigen, dass dieses  $\lambda \in [0, 1]$  ist, und das folgt aus  $p_{d+1} < 1$ ,  $q_{d+1} < 1$  und  $\mu \in [0, 1]$ .  $\square$

### Die stereographische Projektion

**Definition 4.84** Die Einschränkung der oben definierten Zentralprojektion auf  $S_0^d := S^d \setminus \{e_{d+1}\}$  heißt **stereographische Projektion**. Wir bezeichnen sie mit  $\varphi$ .



**Satz 4.85** Die stereographische Projektion  $\varphi : S_0^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  ist bijektiv, und es gilt

$$\varphi^{-1}(y) = \frac{1}{\|y\|^2 + 1} (2y, \|y\|^2 - 1).$$

*Beweis:*

1. *Injectivität:*

Sei  $y = \varphi(x) = \frac{1}{1-x_{d+1}} x'$  mit  $x = (x', x_{d+1}) \in S_0^d$ . Dann ist  $\|x\|^2 = \|x'\|^2 + x_{d+1}^2 = 1$  und daher

$\|y\|^2 = \frac{\|x'\|^2}{(1-x_{d+1})^2} = \frac{1-x_{d+1}^2}{(1-x_{d+1})^2} = \frac{1+x_{d+1}}{1-x_{d+1}}$ , also  $(1-x_{d+1})\|y\|^2 = 1+x_{d+1}$  und folglich  $x_{d+1} = \frac{\|y\|^2-1}{\|y\|^2+1}$ .

Weiter ergibt sich  $x' = (1-x_{d+1})y = \left(1 - \frac{\|y\|^2-1}{\|y\|^2+1}\right)y = \frac{2}{\|y\|^2+1}y$ .

Es ist also notwendigerweise  $x = \frac{1}{\|y\|^2+1} (2y, \|y\|^2 - 1)$ , und daraus folgt die Injectivität von  $\varphi$ .

2. *Surjektivität:*

Sei  $y \in \mathbb{R}^d$  und  $x := \frac{1}{\|y\|^2+1} (2y, \|y\|^2 - 1)$ . Dann ist  $\pi(x) = y$ :

$$\pi(x) = \frac{1}{1 - x_{d+1}} x' = \frac{1}{1 - \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1}} \frac{1}{\|y\|^2 + 1} 2y = y.$$

Nun ist

$$\|x\|^2 = \frac{\|2y\|^2 + (\|y\|^2 - 1)^2}{(\|y\|^2 + 1)^2} = \frac{\|y\|^4 + 2\|y\|^2 + 1}{(\|y\|^2 + 1)^2} = 1$$

und

$$x_{d+1} = \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1} < 1,$$

also gibt es tatsächlich zu jedem  $y \in \mathbb{R}^d$  ein  $x \in S_0^d$ , sodass  $\varphi(x) = \pi(x) = y$ .  
 $\square$

Die stereographische Projektion hat interessante Eigenschaften, von denen wir einige näher besprechen werden. Die folgende Bemerkung dient als Vorbereitung dazu.

**Bemerkung 4.86** Sei  $H$  eine Hyperebene des  $\mathbb{R}^{d+1}$  mit Gleichung  $a \cdot x = \beta$ , sodass  $H \cap S^d \neq \emptyset$ . Dann ist  $H \cap S^d$  eine (eventuell zu einem Punkt ausgearzte) Sphäre des Teilraums  $H$ , und zwar gilt

$$H \cap S^d = S_H(m, r) := \{x \in H : \|x - m\| = r\}$$

mit

$$m = \frac{\beta}{\|a\|^2} a \in H \quad \text{und} \quad r^2 = 1 - \frac{\beta^2}{\|a\|^2}.$$

*Beweis:*

Zunächst sehen wir, dass der angegebene Punkt  $m$  tatsächlich auf der Hyperebene  $H$  liegt, denn  $a \cdot m = a \cdot \frac{\beta}{\|a\|^2} a = \beta$ .

$H \cap S^d$  ist genau dann nicht leer, wenn der Abstand von  $H$  zum Ursprung  $\leq 1$  ist, das heißt, wenn  $\frac{|\beta|}{\|a\|} \leq 1$ .

Sei nun  $x \in H \cap S^d$ , also  $a \cdot x = \beta$  und  $\|x\| = 1$ . Dann gilt (mit  $m$  und  $r$  wie oben):

$$\|x - m\|^2 = \left\| x - \frac{\beta}{\|a\|^2} a \right\|^2 = \|x\|^2 - 2 \frac{\beta}{\|a\|^2} x \cdot a + \frac{\beta^2}{\|a\|^2} =$$

$$= 1 - 2 \frac{\beta}{\|a\|^2} \beta + \frac{\beta^2}{\|a\|^2} = 1 - \frac{\beta^2}{\|a\|^2} = r^2,$$

also ist  $x \in S_H(m, r)$ .

Sei umgekehrt  $x \in S_H(m, r)$ . Dann ist  $\|x - m\| = r$ , also

$$\|x\|^2 - 2 \frac{\beta}{\|a\|^2} x \cdot a + \frac{\beta^2}{\|a\|^2} = 1 - \frac{\beta^2}{\|a\|^2}.$$

Andererseits ist  $x \in H$ , also  $a \cdot x = \beta$ , und es folgt  $\|x\|^2 = 1$  und somit  $x \in H \cap S^d$ .  $\square$

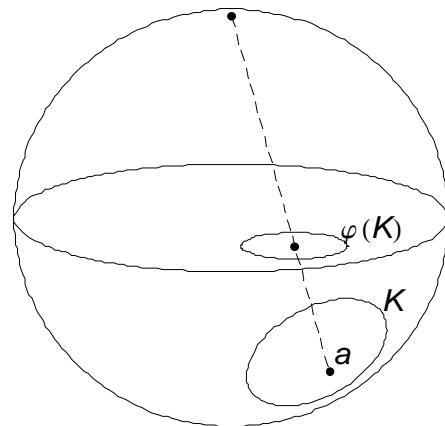
**Satz 4.87** *Sei  $H$  eine Hyperebene des  $\mathbb{R}^{d+1}$  mit  $H \cap S_0^d \neq \emptyset$ . Dann gilt*

a) falls  $e_{d+1} \notin H$ , ist  $\varphi(H \cap S_0^d)$  ein Punkt oder eine Sphäre im  $\mathbb{R}^d$ ;

b) falls  $e_{d+1} \in H$ , ist  $\varphi(H \cap S_0^d)$  eine Hyperebene des  $\mathbb{R}^d$ ;

und auf diese Weise lassen sich alle Punkte, Sphären und Hyperebenen des  $\mathbb{R}^d$  darstellen.

Auf Grund dieses Satzes und der vorhergehenden Bemerkung kann man also sagen: Die stereographische Projektion bildet die in  $S^d$  enthaltenen  $(d-1)$ -dimensionalen Sphären umkehrbar eindeutig auf die Sphären und Hyperebenen des  $\mathbb{R}^d$  ab. Die folgende Abbildung zeigt die Situation für den Fall, dass die Hyperebene  $H$  die Gleichung  $a \cdot x = 1$  hat (siehe Beweis).



*Beweis:*

Sei  $H$  eine Hyperebene des  $\mathbb{R}^{d+1}$  mit Gleichung  $a \cdot x = \beta$ , und  $K := H \cap S_0^d$ . Wir schreiben wie vorhin  $a = (a', a_{d+1})$ .

$$\begin{aligned}
\varphi(K) &= \{y \in \mathbb{R}^d : \varphi^{-1}(y) \in H\} = \{y \in \mathbb{R}^d : a \cdot \varphi^{-1}(y) = \beta\} = \\
&= \left\{y \in \mathbb{R}^d : \frac{1}{\|y\|^2 + 1} (2a' \cdot y + a_{d+1}(\|y\|^2 - 1)) = \beta\right\} = \\
&= \left\{y \in \mathbb{R}^d : 2a' \cdot y + a_{d+1}(\|y\|^2 - 1) = \beta(\|y\|^2 + 1)\right\}.
\end{aligned}$$

Die Gleichung von  $\varphi(K)$  lautet daher, wenn wir  $x$  statt  $y$  schreiben:

$$(a_{d+1} - \beta) \|x\|^2 + 2a' \cdot x = a_{d+1} + \beta.$$

**1. Fall:**  $a_{d+1} - \beta \neq 0$ .

In diesem Fall können wir durch  $a_{d+1} - \beta$  dividieren und erhalten nach quadratischer Ergänzung folgende Gleichung:

$$\left\|x + \frac{1}{a_{d+1} - \beta} a'\right\|^2 = \frac{1}{(a_{d+1} - \beta)^2} \|a'\|^2 + \frac{a_{d+1} + \beta}{a_{d+1} - \beta}.$$

Das können wir auch so schreiben:

$$\left\|x - \frac{1}{\beta - a_{d+1}} a'\right\|^2 = \frac{1}{(\beta - a_{d+1})^2} (\|a'\|^2 + a_{d+1}^2 - \beta^2).$$

Hier sehen wir, dass es sich um die Gleichung einer Sphäre  $S(m, r)$  (bzw. für  $r = 0$  eines Punktes) handelt, mit

$$m = \frac{1}{\beta - a_{d+1}} a' \text{ und } r^2 = \frac{1}{(\beta - a_{d+1})^2} (\|a'\|^2 + a_{d+1}^2 - \beta^2).$$

Der Ausdruck für  $r^2$  ist nicht negativ, da ja  $\|a\|^2 - \beta^2 \geq 0$  (das heißt  $\frac{|\beta|}{\|a\|} \leq 1$ , siehe Beweis von Bemerkung 4.86).

Wenn  $\beta \neq 0$  ist, können wir annehmen, dass  $\beta = 1$  ist (andernfalls dividieren wir die Gleichung durch  $\beta$ ), und dann ergibt sich

$$m = \frac{1}{1 - a_{d+1}} a' = \varphi(a).$$

In diesem Fall ist also  $a$  der Pol der Hyperebene  $H$  bezüglich  $S^d$ , und  $m$  erhält man daraus durch Zentralprojektion.

Wenn  $\beta = 0$  ist, geht  $H$  durch den Ursprung, und wir erhalten

$$m = -\frac{1}{a_{d+1}} a'$$

Hier entsteht  $m$  gewissermaßen durch Zentralprojektion des "unendlich fernen Punktes" der Geraden mit Richtung  $a$  durch den Ursprung, denn es gilt

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta - \lambda a_{d+1}} \lambda a' = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\beta}{\lambda} - a_{d+1}} a' = -\frac{1}{a_{d+1}} a'.$$

In der *projektiven Geometrie* werden solche "Fernpunkte" systematisch in die Betrachtung mit einbezogen, sodass dann gar keine diesbezügliche Fallunterscheidung mehr notwendig ist.

**2. Fall:**  $a_{d+1} - \beta = 0$ .

In diesem Fall gilt  $a \cdot e_{d+1} = a_{d+1} = \beta$ , das heißt  $H$  geht durch den Nordpol  $e_{d+1}$ , und die Gleichung von  $\varphi(K)$  lautet

$$2a' \cdot x = a_{d+1} + \beta = 2\beta.$$

Das ist für  $a' \neq o$  die Gleichung einer Hyperebene des  $\mathbb{R}^d$ .

Wäre  $a' = o$ , dann würde die Gleichung von  $H$  lauten:  $a_{d+1}x_{d+1} = \beta$ , das heißt  $x_{d+1} = 1$ . Diese Hyperebene hat aber mit  $S^d$  nur den Nordpol gemeinsam, was wir ausgeschlossen haben.

Damit sind die Teile a) und b) des Satzes bewiesen.

Überlegen wir uns jetzt, dass es zu jeder Sphäre  $S(m, r)$  des  $\mathbb{R}^d$  eine Hyperebene  $H$  des  $\mathbb{R}^{d+1}$  gibt, sodass  $S(m, r) = \varphi(H \cap S_0^d)$ , das heißt  $\varphi^{-1}(S(m, r)) = H \cap S_0^d$ . Dabei lassen wir auch den Ausartungsfall  $r = 0$  zu.

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(S(m, r)) &= \{x \in S_0^d : \varphi(x) \in S(m, r)\} = \\ &= \{x \in S_0^d : \|\varphi(x) - m\|^2 = r^2\} = \\ &= \left\{x \in S_0^d : \left\| \frac{1}{1-x_{d+1}}x' - m \right\|^2 = r^2 \right\} = \\ &= \left\{x \in S_0^d : \|x' - (1-x_{d+1})m\|^2 = (1-x_{d+1})^2r^2 \right\} = \\ &= \left\{x \in S_0^d : \|x'\|^2 - 2(1-x_{d+1})m \cdot x' + (1-x_{d+1})^2\|m\|^2 = (1-x_{d+1})^2r^2 \right\}. \end{aligned}$$

Für  $x \in S_0^d$  gilt  $\|x'\|^2 + x_{d+1}^2 = \|x\|^2 = 1$ . Die Gleichung von  $\varphi^{-1}(S(m, r))$  lautet daher:

$$(1-x_{d+1}^2) - 2(1-x_{d+1})m \cdot x' + (1-x_{d+1})^2\|m\|^2 = (1-x_{d+1})^2r^2.$$

Nach Division durch  $1-x_{d+1}$  ergibt das

$$1 + x_{d+1} - 2m \cdot x' + (1-x_{d+1})\|m\|^2 = (1-x_{d+1})r^2,$$

$$\text{also } -2m \cdot x' + (1 - \|m\|^2 + r^2)x_{d+1} = -1 - \|m\|^2 + r^2,$$

das heißt  $a \cdot x = \beta$  mit  $a := (-2m, 1 - \|m\|^2 + r^2)$  und  $\beta := -1 - \|m\|^2 + r^2$ .

$a \neq o$ , denn entweder ist  $m \neq o$  oder  $a_{d+1} = 1 + r^2 \neq 0$ .

Wir erhalten also:  $\varphi^{-1}(S(m, r)) = H \cap S_0^d$  mit der Hyperebene  $H := \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : a \cdot x = \beta\}$ .

Jetzt haben wir noch zu zeigen, dass es zu jeder Hyperebene  $H'$  des  $\mathbb{R}^d$  eine durch  $e_{d+1}$  gehende Hyperebene  $H$  des  $\mathbb{R}^{d+1}$  gibt, sodass  $H' = \varphi(H \cap S_0^d)$ , das heißt  $\varphi^{-1}(H') = H \cap S_0^d$ .

Sei  $H' = \{y \in \mathbb{R}^d : a' \cdot y = \beta\}$  mit  $a' \in \mathbb{R}^d \setminus \{o\}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(H') &= \{x \in S_0^d : \varphi(x) \in H'\} = \{x \in S_0^d : a' \cdot \varphi(x) = \beta\} = \\ &= \{x \in S_0^d : a' \cdot \frac{1}{1-x_{d+1}}x' = \beta\} = \{x \in S_0^d : a' \cdot x' = \beta(1 - x_{d+1})\} = \\ &= \{x \in S_0^d : a' \cdot x' + \beta x_{d+1} = \beta\} = H \cap S_0^d \end{aligned}$$

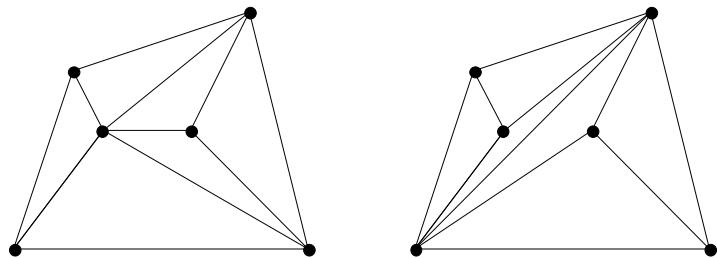
mit  $H := \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : (a', \beta) \cdot x = \beta\}$ , und das ist eine durch  $e_{d+1}$  gehende Hyperebene.  $\square$

#### 4.4.5 Delaunay-Triangulationen

##### Definition

(Es handelt sich hier um Triangulationen, die Voronoi bereits 1908 für gitterförmige Punktanordnungen betrachtet hat, und die dann von *B.N. Delaunay* 1934 für allgemeinere Punktmengen definiert wurden.)

Sei  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$  eine endliche Menge von Punkten im  $\mathbb{R}^d$ . Wir wollen aus gewissen  $(d+1)$ -elementigen Teilmengen von  $P$  Simplizes bilden, welche paarweise keine inneren Punkte gemeinsam haben, sodass die Vereinigung dieser Simplizes gleich der konvexen Hülle von  $P$  ist. Die folgende Abbildung zeigt zwei solche *Triangulationen* einer Menge von 6 Punkten im  $\mathbb{R}^2$ .



Im Allgemeinen gibt es viele Möglichkeiten, eine endliche Punktmenge zu triangulieren. Die von Delaunay betrachtete ist in mancher Hinsicht optimal. Sie kann folgenderweise definiert werden:

**Definition 4.88** Sei  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$  eine nicht in einer Hyperebene enthaltene endliche Teilmenge von  $\mathbb{R}^d$ .  $\pi$  sei die Zentralprojektion vom Nordpol  $e_{d+1}$  auf den  $\mathbb{R}^d$ , und  $\varphi$  die stereographische Projektion  $S_0^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Dann verstehen wir unter der **Delaunay-Triangulation** von  $P$  die Menge der  $\pi$ -Bilder der den Nordpol nicht enthaltenden Facetten des folgenden konvexen Polytops:

$$Q := \text{conv}\{\varphi^{-1}(p_1), \dots, \varphi^{-1}(p_n), e_{d+1}\}.$$

**Bemerkung 4.89** Die Delaunay-Triangulation von  $n$  Punkten im  $\mathbb{R}^d$  besteht aus lauter  $d$ -Simplizes, wenn keine  $d+2$  dieser Punkte auf einer Sphäre liegen. (Nur in diesem Fall ist die Bezeichnung "Triangulation" eigentlich gerechtfertigt.)

*Beweis:*

Auf Grund von Satz 4.83 sehen wir, dass die  $\pi$ -Bilder der  $e_{d+1}$  nicht enthaltenden Facetten von  $Q$  konvexe Polytope im  $\mathbb{R}^d$  sind, deren Ecken Punkte aus  $P$  sind. Angenommen, eines dieser Polytope wäre kein  $d$ -Simplex. Es würde also mindestens  $d+2$  Ecken  $p_{i_1}, \dots, p_{i_{d+2}}$  haben. Die Punkte  $\varphi^{-1}(p_{i_1}), \dots, \varphi^{-1}(p_{i_{d+2}})$  wären dann Ecken einer den Nordpol nicht enthaltenden Facette von  $Q$ , würden also in einer Hyperebene  $H$  liegen, die nicht durch den Nordpol geht. Auf Grund von Satz 4.87 würden dann aber die  $\varphi$ -Bilder davon, also die ursprünglichen Punkte  $p_{i_1}, \dots, p_{i_{d+2}}$ , auf einer Sphäre im  $\mathbb{R}^d$  liegen, im Widerspruch zur Annahme.  $\square$

### Charakterisierung

Zum nächsten Satz benötigen wir folgende einfache Tatsache:

**Bemerkung 4.90** Durch je  $d+1$  affin unabhängige Punkte im  $\mathbb{R}^d$  geht genau eine Sphäre.

*Beweis:*

Seien  $p_1, \dots, p_{d+1}$  affin unabhängige Punkte im  $\mathbb{R}^d$  und  $\rho$  irgendeine positive Zahl. Wie wir im Anschluss zu Satz 4.75 gesehen haben, gibt es zu den  $d+1$  Kugeln mit Mittelpunkten  $p_i$  und Radius  $\rho$  ein eindeutiges Potenzzentrum. Da alle Kugeln den gleichen Radius haben, kommt es dabei überhaupt nicht auf diesen Radius an. Das Potenzzentrum ist dann ein Punkt  $m$ , der von

allen Punkten  $p_1, \dots, p_{d+1}$  gleichen Abstand hat, sagen wir  $r$ . Folglich liegen diese Punkte auf  $S(m, r)$ . Wegen der Eindeutigkeit des Potenzzentrums gibt es keine andere derartige Sphäre.  $\square$

**Satz 4.91** *Sei  $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^d$  ( $n \geq d$ ), und es gelte: Keine  $d+1$  Punkte aus  $P$  liegen auf einer Hyperebene und keine  $d+2$  Punkte aus  $P$  liegen auf einer Sphäre. Dann bilden irgendwelche  $d+1$  Punkte aus  $P$  genau dann ein Simplex der Delaunay-Triangulation von  $P$ , wenn die durch sie bestimmte Sphäre keinen Punkt aus  $P$  in ihrem Inneren enthält.*

(Unter dem *Inneren einer Sphäre  $S(m, r)$*  verstehen wir natürlich die zugehörige offene Kugel  $K(m, r)$ .)

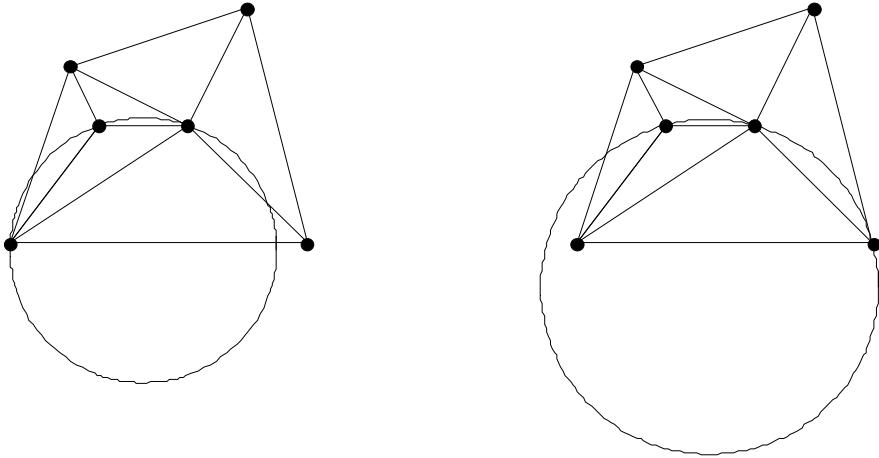
*Beweis:*

a) Seien  $p_{i_1}, \dots, p_{i_{d+1}}$  die Ecken eines Simplex der Delaunay-Triangulation von  $P$ . Dann sind die Punkte  $q_{i_k} := \varphi^{-1}(p_{i_k})$  die Ecken einer Facette des entsprechenden  $(d+1)$ -Polytops  $Q$ . Es gibt also eine nicht durch  $e_{d+1}$  gehende Stützhyperebene  $H$  von  $Q$ , sodass  $q_{i_k} \in H$  für alle  $k \in \{1, \dots, d+1\}$  und  $Q \subset \overline{H^-}$ .

Nach Satz 4.87 ist  $\varphi(H \cap S_0^d)$  eine Sphäre, und analog überlegt man sich leicht, dass  $\varphi(H^+ \cap S_0^d)$  die zugehörige offene Kugel ist. (Es ist dabei zu beachten, dass  $e_{d+1} \in H^-$  und daher  $a_{d+1} < \beta$  ist.) Die Sphäre  $\varphi(H \cap S_0^d)$  geht offensichtlich durch die Punkte  $p_{i_k}$ . Angenommen, ein Punkt  $p_{i_0}$  (mit  $i_0 \notin \{i_1, \dots, i_{d+1}\}$ ) läge innerhalb dieser Sphäre, das heißt in  $\varphi(H^+ \cap S_0^d)$ . Dann würde  $q_{i_0} := \varphi^{-1}(p_{i_0})$  in  $H^+$  liegen, im Widerspruch zu  $Q \subset \overline{H^-}$ .

b) Seien umgekehrt  $p_{i_1}, \dots, p_{i_{d+1}}$  Punkte aus  $P$ , sodass die durch sie gehende Sphäre  $S(m, r)$  keinen Punkt aus  $P$  in ihrem Inneren enthält. Dann gibt es nach Satz 4.87 eine nicht durch  $e_{d+1}$  gehende Hyperebene  $H$  im  $\mathbb{R}^{d+1}$ , sodass  $S(m, r) = \varphi(H \cap S_0^d)$ , und die Punkte  $q_{i_k} := \varphi^{-1}(p_{i_k})$  liegen auf dieser Hyperebene. Wir können annehmen, dass  $e_{d+1} \in H^-$  (sonst multiplizieren wir die Gleichung von  $H$  mit  $(-1)$ ). Nach Voraussetzung ist  $p_i \notin K(m, r)$  für alle  $i$ . Daraus folgt  $q_i = \varphi^{-1}(p_i) \notin H^+$ , also  $q_i \in \overline{H^-}$  für alle  $i$ . Daher ist  $H$  eine Stützhyperebene von  $Q$ , und die Punkte  $q_{i_k}$  sind die Ecken der entsprechenden Facette. Auf diese Weise kann man sehen, dass die Punkte  $p_{i_1}, \dots, p_{i_{d+1}}$  ein Simplex der Delaunay-Triangulation von  $P$  bilden.  $\square$

Die folgende Abbildung zeigt die Delaunay-Triangulation der 6 Punkte, die wir am Anfang betrachtet haben, zusammen mit zwei Umkreisen von je drei Punkten.



Prinzipiell kann die Delaunay-Triangulation einer Menge  $P$  von  $n$  Punkten auf Grund des letzten Satzes berechnet werden. Die Rechenzeit ist dabei aber von der Größenordnung  $O(n^{d+2})$ . Man muss ja jede  $(d+1)$ -elementige Teilmenge von  $P$  mit allen anderen Punkten vergleichen, und das ergibt  $\binom{n}{d+1}(n-d-1) = O(n^{d+2})$  Vergleiche. Besser ist es, wenn man die Delaunay-Triangulation auf Grund der Definition berechnet, da es für die konvexe Hülle effizientere Algorithmen gibt (siehe Vorlesungen oder Bücher über Algorithmische Geometrie).

Delaunay-Triangulationen werden z.B. verwendet, wenn man von einer Funktion von zwei oder mehr Variablen die Funktionswerte an endlich vielen Stellen kennt und dazwischen linear interpolieren will. Dieses Problem tritt etwa bei digitalen Geländemodellen auf.

### Dualität

Zwischen den Delaunay-Triangulationen und den Voronoi-Diagrammen besteht eine Beziehung, die eng mit der Polarität von konvexen Polytopen zusammenhängt:

**Satz 4.92** *Seien  $\pi$  und  $\varphi$  wie oben.  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$  sei eine nicht in einer Hyperebene enthaltene endliche Teilmenge von  $\mathbb{R}^d$ .*

$$Q := \text{conv}\{\varphi^{-1}(p_1), \dots, \varphi^{-1}(p_n), e_{d+1}\}$$

sei das der Delaunay-Triangulation von  $P$  entsprechende Polytop im  $\mathbb{R}^{d+1}$ . Dann ist das Voronoi-Diagramm von  $P$  gleich dem  $\pi$ -Bild der Facetten des polaren Polytops  $Q^*$  ohne die in Hyperebene  $x_{d+1} = 1$  enthaltenen Teile.

*Beweis:*

Sei  $q_i = \varphi^{-1}(p_i)$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ , also  $Q = \text{conv}\{q_1, \dots, q_n, e_{d+1}\}$ .

Zunächst ist klar dass  $Q^*$  im Halbraum  $x_{d+1} \leq 1$  enthalten ist, denn  $Q^* = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : q_1 \cdot x \leq 1, \dots, q_n \cdot x \leq 1, e_{d+1} \cdot x \leq 1\}$  und  $e_{d+1} \cdot x = x_{d+1}$ .

Sei nun  $V_{i_0}$  die Voronoi-Zelle des Punktes  $p_{i_0}$  und  $F_{i_0}$  die der Ecke  $q_{i_0}$  entsprechende Facette von  $Q^*$ . Dann ist

$$V_{i_0} = \{y \in \mathbb{R}^d : \|y - p_{i_0}\| \leq \|y - p_i\| \text{ für alle } i \neq i_0\}$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{i_0} &:= F_{i_0} \cap \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : x_{d+1} < 1\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : q_{i_0} \cdot x = 1, q_i \cdot x \leq 1 \text{ für alle } i \neq i_0, x_{d+1} < 1\} \end{aligned}$$

Es ist zu zeigen:  $V_{i_0} = \pi(\tilde{F}_{i_0})$ .

Sei  $y \in \pi(\tilde{F}_{i_0})$ . Dann gibt es ein  $x \in \mathbb{R}^{d+1}$  mit  $x_{d+1} < 1$ , sodass

$$y = \frac{1}{1 - x_{d+1}} x', \quad q_{i_0} \cdot x = 1 \quad \text{und} \quad q_i \cdot x \leq 1 \text{ für alle } i \neq i_0.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \|y - p_i\|^2 &= \left\| \frac{1}{1 - x_{d+1}} x' - \frac{1}{1 - q_{i,d+1}} q'_i \right\|^2 = \\ &= \frac{1}{(1 - x_{d+1})^2} \|x'\|^2 - 2 \frac{1}{1 - x_{d+1}} \frac{1}{1 - q_{i,d+1}} q'_i \cdot x' + \frac{1}{(1 - q_{i,d+1})^2} \|q'_i\|^2 \end{aligned}$$

für alle  $i$ , also insbesondere auch für  $i = i_0$ .

Die Ungleichung  $\|y - p_{i_0}\| \leq \|y - p_i\|$  ist daher gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned} -2 \frac{1}{1 - x_{d+1}} \frac{1}{1 - q_{i_0,d+1}} q'_{i_0} \cdot x' + \frac{1}{(1 - q_{i_0,d+1})^2} \|q'_{i_0}\|^2 &\leq \\ \leq -2 \frac{1}{1 - x_{d+1}} \frac{1}{1 - q_{i,d+1}} q'_i \cdot x' + \frac{1}{(1 - q_{i,d+1})^2} \|q'_i\|^2. & \end{aligned} \tag{4.2}$$

(Der Term  $\frac{1}{(1 - x_{d+1})^2} \|x'\|^2$  fällt ja weg.)

Um die Rechnung übersichtlicher zu gestalten, verwenden wir folgende Abkürzungen:

$$z := x_{d+1}, \quad a := q_{i_0, d+1}, \quad b := q_{i, d+1}.$$

Wegen  $q_{i_0} \cdot x = 1$  ist  $q'_{i_0} \cdot x' = 1 - q_{i_0, d+1} x_{d+1} = 1 - a z$ .

Wegen  $\|q_i\|^2 = 1$  ist  $\|q'_i\|^2 = 1 - q_{i, d+1}^2 = 1 - b^2$  und analog  $\|q'_{i_0}\|^2 = 1 - a^2$ .

Die Ungleichung (4.2) lautet also jetzt:

$$-2 \frac{1}{1-z} \frac{1}{1-a} (1 - a z) + \frac{1 - a^2}{(1-a)^2} \leq -2 \frac{1}{1-z} \frac{1}{1-b} q'_i \cdot x' + \frac{1 - b^2}{(1-b)^2},$$

das heißt

$$-2 \frac{1}{1-z} \frac{1}{1-a} (1 - a z) + \frac{1 + a}{1 - a} \leq -2 \frac{1}{1-z} \frac{1}{1-b} q'_i \cdot x' + \frac{1 + b}{1 - b}. \quad (4.3)$$

Nun gilt aber

$$-2 \frac{1}{1-z} \frac{1}{1-a} (1 - a z) + \frac{1 + a}{1 - a} = -2 \frac{1}{1-z} \frac{1}{1-b} (1 - b z) + \frac{1 + b}{1 - b}. \quad (4.4)$$

Das kann man leicht nachrechnen: Multiplizieren wir diese Gleichung mit  $(1-z)(1-a)(1-b)$ , so sehen wir, dass sie gleichbedeutend ist mit

$$(-2(1 - az) + (1 - z)(1 + a))(1 - b) = (-2(1 - bz) + (1 - z)(1 + b))(1 - a).$$

Nun ist aber

$$-2(1 - az) + (1 - z)(1 + a) = -1 + az + a - z = -(1 + z)(1 - a)$$

und analog

$$-2(1 - bz) + (1 - z)(1 + b) = -1 + zb + b - z = -(1 + z)(1 - b),$$

und daher ist die Gleichung (4.4) tatsächlich richtig. Folglich ist die Ungleichung (4.3) gleichbedeutend mit  $1 - bz \geq q'_i \cdot x'$  (man beachte  $1 - z > 0$  und  $1 - b > 0$ ), das heißt aber

$$1 \geq q'_i \cdot x' + q_{i, d+1} x_{d+1} = q_i \cdot x.$$

Daher sehen wir: Für jedes  $y \in \pi(\tilde{F}_{i_0})$  gilt  $\|y - p_{i_0}\| \leq \|y - p_i\|$  für alle  $i$ , das heißt  $y \in V_{i_0}$ .

Wenn umgekehrt  $y \in V_{i_0}$  ist, dann überlegt man sich zunächst, dass es ein  $x \in \mathbb{R}^{d+1}$  mit  $y = \pi(x)$ ,  $q_{i_0} \cdot x = 1$  und  $x_{d+1} < 1$  gibt. Für dieses  $x$  gilt nach Obigem  $q_i \cdot x \leq 1$  für alle  $i$ , und es folgt  $x \in \tilde{F}_{i_0}$ , also  $y \in \pi(\tilde{F}_{i_0})$ .  $\square$



# Kapitel 5

## Äquiforme Geometrie

Unter "Äquiformer Geometrie" versteht man im Sinne von Felix Klein die Geometrie der Invarianten gegenüber Ähnlichkeitsabbildungen. Dazu gehören insbesondere die Winkel.

### 5.1 Winkelmessung

**Definition 5.1** Unter dem **Winkel** zwischen zwei Vektoren  $v, w \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\}$  versteht man die (eindeutig bestimmte) Zahl  $\varphi \in [0, \pi]$  mit

$$\cos \varphi = \frac{v \cdot w}{\|v\| \|w\|}.$$

Wir bezeichnen diesen Winkel mit  $\angle(v, w)$ .

Die Existenz und Eindeutigkeit einer solchen Zahl  $\gamma$  folgt aus der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung:  $|v \cdot w| \leq \|v\| \|w\|$  impliziert ja  $\left| \frac{v \cdot w}{\|v\| \|w\|} \right| \leq 1$ , und bekanntlich gibt es zu jeder reellen Zahl  $z$  mit  $|z| \leq 1$  genau ein  $\varphi \in [0, \pi]$  mit  $\cos \varphi = z$ .

**Definition 5.2** Seien  $H$  und  $K$  zwei von einem Punkt ausgehenden Halbgeraden mit erzeugenden Vektoren  $v$  und  $w$  (das heißt  $H = \{p + \lambda v : \lambda \geq 0\}$  und  $K = \{p + \lambda w : \lambda \geq 0\}$ ). Dann versteht man unter dem **Winkel** zwischen  $H$  und  $K$  den Winkel zwischen  $v$  und  $w$ . Bezeichnung:  $\angle(H, K)$

Vergleichen wir die hier definierten Winkel mit dem Winkelbegriff von Hilbert (Seite 16), so fällt folgendes auf: Hier wird eigentlich ein *Winkelmaß* definiert, d.h. eine reelle Zahl, die dem durch zwei Vektoren oder zwei Halbgeraden gebildeten "Winkel" zugeordnet ist. Der Unterschied zwischen "Winkel" und "Winkelmaß" ist analog zum Unterschied zwischen "Strecke" und "Abstand". Es handelt sich dabei also um begrifflich völlig verschiedene Dinge. Allerdings ist es allgemein üblich, statt "Winkelmaß" einfach "Winkel" zu sagen.

Der Winkel zwischen zwei Geraden muss ein bisschen anders definiert werden, da bei einer Geraden mit Richtungsvektor  $v$  auch  $-v$  ein Richtungsvektor ist.

**Definition 5.3** *Seien  $G_1$  und  $G_2$  zwei Geraden im  $\mathbb{R}^n$  mit Richtungsvektoren  $v_1$  und  $v_2$ . Dann versteht man unter dem Winkel von  $G_1$  und  $G_2$  die Zahl  $\varphi \in [0, \pi/2]$  mit*

$$\cos \varphi = \frac{|v \cdot w|}{\|v\| \|w\|}.$$

## 5.2 Ähnlichkeiten

**Definition 5.4** *Eine Affinität  $\alpha$  des  $\mathbb{R}^d$  heißt **Ähnlichkeit**, wenn es ein  $\gamma > 0$  gibt, sodass*

$$\|\alpha(x) - \alpha(y)\| = \gamma \|x - y\| \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}^d.$$

*Die Zahl  $\gamma$  heißt dann **Ähnlichkeitsfaktor** von  $\alpha$ .*

Eine Abbildung  $\alpha$  ist also genau dann eine Isometrie, wenn sie eine Ähnlichkeit mit Ähnlichkeitsfaktor 1 ist.

**Satz 5.5** *Eine Affinität  $\alpha : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d : x \rightarrow Ax + b$  ist genau dann eine Ähnlichkeit mit Ähnlichkeitsfaktor  $\gamma$ , wenn die Matrix  $\frac{1}{\gamma}A$  orthogonal ist.*

*Beweis:* Sei  $A' = \frac{1}{\gamma}A$ . Dann ist  $A = \gamma A'$  und daher  $\alpha(x) = \gamma A'x + b$ .

Wenn  $A'$  orthogonal ist, dann ist  $\|\alpha(x) - \alpha(y)\| = \|\gamma A'x - \gamma A'y\| = \gamma \|A'x - A'y\| = \gamma \|x - y\|$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}^d$ , d.h.  $\alpha$  ist eine Ähnlichkeit mit Faktor  $\gamma$ .

Wenn umgekehrt  $\alpha$  eine Ähnlichkeit mit Faktor  $\gamma$  ist, dann ist  $\gamma \|A'x - A'y\| = \gamma \|x - y\|$  und daher  $\|A'x - A'y\| = \|x - y\|$  für alle  $x, y$ , und daraus folgt, dass  $A'$  orthogonal ist.  $\square$

Die Ähnlichkeiten des  $\mathbb{R}^d$  sind also genau die Abbildungen der Form  $x \rightarrow \gamma A'x + b$  mit einer orthogonalen Matrix  $A'$  und einem  $\gamma > 0$ .

Es ist wieder leicht zu sehen, dass die Ähnlichkeiten des  $\mathbb{R}^d$  eine Gruppe bilden. Die zugehörige Geometrie im Sinne von Felix Klein heißt **äquiforme Geometrie**. Sie besteht also aus dem Studium der Ähnlichkeits-Invarianten, das sind vor allem die im Abschnitt 5.1 diskutierten (nichtorientierten) Winkel. Wir überlegen uns das hier für die Winkel von Halbgeraden:

**Satz 5.6** *Im  $\mathbb{R}^d$  seien  $H, K$  zwei von einem Punkt  $p$  ausgehende Halbgeraden und  $\alpha$  eine Ähnlichkeit. Dann gilt*

$$\angle(\alpha(H), \alpha(K)) = \angle(H, K).$$

*Beweis:* Sei  $H = \{p + \lambda v : \lambda \geq 0\}$  und  $K = \{p + \lambda w : \lambda \geq 0\}$ .

Sei  $f$  die zu  $\alpha$  gehörige lineare Abbildung, also  $\alpha(x) = f(x) + b$  mit einem  $b \in \mathbb{R}^d$ . Dann gilt

$$\alpha(H) = \{\alpha(p) + \lambda f(v) : \lambda \geq 0\} \text{ und } \alpha(K) = \{\alpha(p) + \lambda f(w) : \lambda \geq 0\},$$

denn  $\alpha(p + \lambda v) = f(p + \lambda v) + b = f(p) + \lambda f(v) + b = \alpha(p) + \lambda f(v)$ , und analog mit  $w$  statt  $v$ .

Daher ist  $\angle(\alpha(H), \alpha(K)) = \angle(f(v), f(w))$ , und es ist nur zu zeigen:

$$\angle(f(v), f(w)) = \angle(v, w).$$

Sei nun  $A$  die zu  $f$  gehörige Matrix. Dann gibt es ein  $\gamma > 0$ , sodass  $A = \gamma A'$  mit einer orthogonalen Matrix  $A'$ , und es folgt:

$$\cos \angle(f(v), f(w)) = \cos \angle(Av, Aw) = \frac{Av \cdot Aw}{\|Av\| \|Aw\|} = \frac{\gamma^2 A'v \cdot A'w}{\gamma^2 \|A'v\| \|A'w\|} = \frac{v \cdot w}{\|v\| \|w\|} = \cos \angle(v, w),$$

denn  $A'v \cdot A'w = v \cdot w$  und  $\|A'v\| = \|v\|$ ,  $\|A'w\| = \|w\|$  wegen der Orthogonalität von  $A'$ .  $\square$

**Bemerkung 5.7** *Natürlich sind alle Bewegungsinvarianten auch Ähnlichkeitsinvarianten.*

**Definition 5.8** *Zwei Teilmengen  $M$  und  $M'$  des  $\mathbb{R}^d$  heißen **ähnlich**, wenn es eine Ähnlichkeit  $\alpha$  des  $\mathbb{R}^d$  gibt, welche  $M$  auf  $M'$  abbildet (d.h.  $M' = \alpha(M)$ ).*

In diesem Sinne kann man also z.B. von ähnlichen Dreiecken sprechen und sieht z.B.: Bei zwei ähnlichen Dreiecken stimmen die Winkel überein, und die Seitenlängen unterscheiden sich nur um einen konstanten Faktor.

# Literaturverzeichnis

- [1] Alon, N. und Györi, E.: The number of small semispaces of a finite set of points in the plane. *Isr. J. Math.* 53, 97-120 (1986).
- [2] Brøndsted, A.: An introduction to convex polytopes. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1983.
- [3] Courant, R. und Robbins, H.: Was ist Mathematik? 3. Aufl., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1973.
- [4] Coxeter, H.S.M.: Regular polytopes. Dover Publ., New York 1973.
- [5] Eckhoff, J.: Helly, Radon, and Carathéodory type theorems. In: *Handbook of Convex Geometry* (ed. P.M. Gruber, J.M. Wills), North-Holland, Amsterdam etc. 1993.
- [6] Franz, W.: Topologie. 2 Bände. Walter de Gruyter, Berlin 1965.
- [7] Griffiths, H.B. and Hilton, P.J.: A comprehensive textbook of classical mathematics. A contemporary interpretation. Van Nostrand Reinhold Comp., London etc. 1970.
- [8] Gritzmann, P. and Klee, V.: Mathematical programming and convex geometry.
- [9] Hilbert, D.: Grundlagen der Geometrie. 11. Aufl., Teubner, Stuttgart 1972. In: *Handbook of Convex Geometry* (ed. P.M. Gruber, J.M. Wills), North-Holland, Amsterdam etc. 1993.
- [10] Leichtweiss, K.: Konvexe Mengen. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1980.
- [11] Linhart, J.: Diskrete Mathematik. Abakus-Verlag, Salzburg 1996.

- [12] Roos, C., Terlaky, T., and Vial, J.-Ph.: Theory and algorithms for linear optimization. John Wiley & Sons 1997.
- [13] Schaal, Hermann: Lineare Algebra und Analytische Geometrie. 3 Bände. Vieweg, Braunschweig 1976.
- [14] Wußing, H.: Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik. Deutscher Verlag der Wiss., Berlin 1979.

# Stichwortverzeichnis

- Abbildung  
    affine, 44  
abgeschlossene Kugel, 52  
abgeschlossener Halbraum, 53  
abhängig  
    affin, 34  
Abstand, 146  
affin abhängig, 34  
affin unabhängig, 34  
affine Abbildung, 44  
affine Geometrie, 21, 23  
affine Hülle, 37  
affine Invarianten, 21, 47  
affine Normalform, 121  
affiner Raum, 24  
affiner Teilraum, 26, 28  
Affinität, 47  
Affinkombination, 32  
Anfangspunkt, 23  
Appolonius, 5  
äquivalent  
    Kurven, 148  
Archimedes, 5  
Archimedisches Axiom, 18  
Außengebiet, 159  
Banach, Stefan, 69  
benachbart, 174  
Bewegung, 176  
    eigentliche, 178  
Bilinearform, 107  
Bolyai, János, 8  
Carathéodory, 59  
Cartesius, 6  
definit, 117  
Dehn, Max, 100  
Dehn-Sommerville-Gleichungen, 100  
Delaunay, 206  
Delaunay-Triangulation, 207  
Descartes, 6  
Dichte, 195  
Dimension, 27, 38  
Dirichlet, 194  
Dirichlet-Zelle, 194  
Distanzfunktion, 68  
Dodekaeder, 95  
Doppelebene, 128  
Doppelgerade, 125  
Drehachse, 184  
Drehspiegelung, 185  
Drehung  
    um eine Gerade, 184  
    um einen Punkt, 182  
Dreieck, 57  
Dreieckspolyeder, 80  
Dualität, 93  
Ebene, 27  
Ebenenpaar  
    paralleles, 131  
    schneidendes, 128  
Ecke, 74  
    eines orientierten Polygons, 153  
    eines Simplex, 173  
eigentliche Bewegung, 178  
einfach, 158

- Einheitssphäre, 119
- Ellipse, 126
- Ellipsoid, 133
- endlichdimensional, 27
- Endpunkt, 23
- Erlanger Programm, 20
- Euklid, 3
- euklidische Geometrie, 21, 145, 177, 213
- euklidische Normalform, 187
- euklidischer Abstand, 146
- Euler'sche Charakteristik, 96
- Euler'scher Polyedersatz, 96
- f-Vektor, 95
- Facette, 74
  - eines orientierten Simplex, 174
  - eines orientierten simplizialen Polyeders, 175
- Feinheit
  - einer Zerlegung, 149
- Fejes Tóth, László, 196
- Ferguson, Samuel, 196
- Fermat, 6
- Fernpunkte, 205
- Fläche, 74
  - parametrisierte, 172
- Fläche 2. Ordnung, 127
- Flächeninhalt, 172
  - eines orientierten Polygons, 155
  - eines Polygons, 162
- Gauß, 7
- Geometrie
  - affine, 21, 23
  - euklidische, 21, 145, 177, 213
  - projektive, 21, 199, 205
- Gerade, 12, 27
- Geradenpaar
  - paralleles, 125
  - schneidendes, 125
- Geschwindigkeitvektor, 149
- gleichsinnig kongruent, 178
- Gleitspiegelung, 181, 184
- Grassmann, Hermann, 7
- Hahn, Hans, 69
- Halbebene, 16
- Halbgerade, 15
- Halbraum, 53
  - eines affinen Teilraums, 54
- Halbstrahl, 15
- Hales, Thomas, 196
- Hauptachsen, 189
- Hauptachsentransformation, 189
- Hauptminor, 118
- Helly, 60
- Heron, 6
- Hilbert, David, 12
- Hipparchos, 6
- Hülle
  - affine, 37
  - konvexe, 54
- hyperbolische Geometrie, 11
- Hyperboloid
  - einschaliges, 134
  - zweischaliges, 135
- Hyperebene, 27
  - eines affinen Teilraums, 43
- Hyperfläche 2. Ordnung, 119
- identische Abbildung, 179, 183
- Ikosaeder, 80, 169
- indefinit, 117
- Index
  - einer quadratischen Form, 117
- Inhalt, 162
- Innengebiet, 159
- Inneres
  - einer Sphäre, 208
- interpretieren, 19
- invariant, 21

- Invarianten
  - affine, 47
  - projektive, 21
- Inzidenzaxiome, 13
  - inzidieren, 13
- Isometrie, 176
  - orientierungstreue, 178
- isomorph, 25
- Jordan-Kurve, 158
- Kante, 74
- Kanten
  - eines orientierten Polygons, 153
- Karmarkar, 105
- Kegel, 128
  - nullteiliger, 131
- kegelige Quadrik, 121
- Kegelschnitt
  - nullteiliger, 126
- Kegelschnitte, 140
- Kern, 62
- Klassifikation
  - affine, 124
- Klein, Felix, 8, 20
- kongruent, 15, 176, 215
  - gleichsinnig, 178
- Kongruenztransformation, 176
- konjugierte Seite, 89
- konvex, 51
- konvexe Hülle, 54
- konvexes Polytop, 56, 74
- Konvexkombination, 54
- Koordinatenachsen, 189
- Koordinatentransformation
  - von quadratischen Formen, 110
- Krasnosel'skij, 64
- Kreis, 52, 191
- Kreisbogenzug, 149
- Kreislinie, 191
- Kreismodell
- Poincaré'sches, 9
- Kreisscheibe, 52
- Kreuzpolytop, 77
- Kugel
  - abgeschlossene, 52
  - offene, 52
- Kugelfläche, 191
- Kugelpackung, 195
- Kurve, 148
  - einfach geschlossene, 158
  - parametrisierte, 148
- Kurve 2. Ordnung, 124
- Lambert, 7
- Länge
  - einer Kurve, 148
  - einer Strecke, 146
  - eines Streckenzugs, 147
  - eines Vektors, 146
- leerer affiner Raum, 24
- leeres Simplex, 173
- Legendre, 7
- Lineare Optimierung, 84
- Lobatschewski, 8
- Möbius, 7
- McMullen, Peter, 104
- Metrik, 146
- Mittelpunkt, 35
  - einer Quadrik, 142
- Mittelpunktsquadrik, 121
  - nullteilige, 136
- Moore, 14
- Motzkin, 104
- negativ definit, 117
- negativ orientiert, 161
- non-Radon-Partition, 58
- Nordpol, 198
- Norm, 146
- Normalform
  - affine, 121

- euklidische, 187
- komplexe, 114
- reelle, 115
- Normalprojektion, 51
- nullteilige Mittelpunktsquadrik, 136
- nullteiliger Kegel, 131
- nullteiliges Ebenenpaar, 128
- nullteiliges Geradenpaar, 125
- Oberfläche, 172
- offene Kugel, 52
- offener Halbraum, 53
- Oktaeder, 77
- Optimierung
  - lineare, 84
- orientiert, 161
- orientiertes Dreieck, 153
- orientiertes Polygon, 153
- orientierungstreue Isometrie, 178
- Ortsvektor, 25
- Parabel, 127
- parabolische Quadrik, 121
- Paraboloid
  - elliptisches, 138
  - hyperbolisches, 137
- parallel, 29
- Parallelbereich, 72
- Parallelenaxiom, 5, 17
- Parallelprojektion, 49
- Parameterdarstellung
  - einer Kurve, 148
- parametrisierte Kurve, 148
- Partition, 58
- Pasch
  - Axiom von, 14
- Pasch, Moritz, 12
- Perspektive, 199
- Pflasterung, 195
- Plücker, 7
- Poincaré, 8
- Polare, 86
- polare Menge, 85
- Polarität, 85
- Polyeder
  - konvexes, 56
  - nichtorientiertes simpliziales, 175
  - orientiertes simpliziales, 174
- Polygon
  - einfaches, 158
  - konvexes, 56
  - nicht-orientiertes, 154
  - orientiertes, 153
- Polygonfläche, 161
- Polygonzug, 147
- Polytop
  - konvexes, 56, 74
  - polares, 88
- positiv definit, 117
- positiv orientiert, 161
- Potenz
  - eines Punktes in Bezug auf eine Kugel, 192
- Potenzdiagramm, 196
- Potenzebene, 193
- Potenzgerade, 193
- Potenzhyperebene, 193
- Potenzzentrum, 194
- projektive Geometrie, 21, 199, 205
- projektive Invarianten, 21
- Ptolemäus, 6
- Punkt, 12, 23, 24, 27
- Pythagoras, 3
- quadratische Ergänzung, 111
- quadratische Form, 106–108
- Quadrik, 106, 119
- Radon, 57
- Radon-Partition, 58
- rechter Winkel, 17
- rektilizierbar, 149

- relativ innerer Punkt, 67
- relativer Randpunkt, 67
- Richtungsraum, 27
- Saccheri, 7
- Satz von
  - Carathéodory, 59
  - Helly, 60
  - Krasnosel'skij, 64
  - Radon, 57
- Scheitel, 16, 190
- Schenkel, 16
- Schrägriss, 50
- Schraubachse, 185
- Schraubung, 185
- Schwarz, Hermann, 151
- Schweikart, 8
- Seite, 74
- semidefinit, 117
- Semiraum, 58
- Signatur
  - einer quadratischen Form, 117
- signiertes Volumen, 175
- simpel, 95
- Simplex, 56
  - nicht-orientiertes, 173
  - orientiertes, 173
- simplizial, 79
- simpliziales Polyeder, 174
- Sommerville, 100
- Sphäre, 191
- Spiegelung
  - an einer Ebene, 183
  - an einer Geraden, 180
- Spiegelungsachse, 180
- Spitze, 129
- stereographische Projektion, 198, 201
- sternförmig, 61
- Sternpolyeder, 170
- Sternpolygon, 157
- Stetigkeitsaxiome, 18
- Strecke, 13
- Streckenabtragung, 15
- Streckenaddition, 15
- Streckenzug, 147
  - einbeschriebener, 149
  - geschlossener, 154
- strikter Trennungssatz, 72
- Stützhalbraum, 71
- Stützhyperebene, 71
- Summe von Teilmengen eines Vektorraums, 38
- symmetrische Bilinearform, 109
- Teilraum
  - affiner, 26, 28
- Teilverhältnis, 35
- Tetraeder, 57
- Trägermenge
  - eines Polygons, 154
  - eines simplizialen Polyeders, 175
- Trägheitsindex, 117
- Trägheitssatz von Sylvester, 115
- Transformation
  - von Quadriken, 120
- Translation, 179, 183
- Trennungssatz, 69
  - strikter, 72
- Unabhängigkeit, 20
- unabhängig, 18
  - affin, 34
- uneigentliche Seiten, 74
- Upper Bound Theorem, 104
- Vektor, 23, 24
- Verbindung, 40
- Verbindungsgerade, 30
- Verbindungsraum, 40
- Verbindungsstrecke, 51
- Vollständigkeitsaxiom, 18
- Volumen
  - signiertes, 175

- Voronoi, 197
- Voronoi-Diagramm, 197
- Voronoi-Zelle, 196
- Widerspruchsfreiheit, 8, 18
- Winkel, 16
  - zwischen zwei Vektoren, 213
- Winkelabtragung, 16
- Winkelbereich, 54
- Zentralprojektion, 198
- Zerlegung, 148
- zueinander konjugiert, 90
- zueinander polar, 87
- zusammenhängend, 160
- zwischen, 13
- zyklische Polytope, 102
- Zylinder
  - elliptischer, 132
  - hyperbolischer, 132
  - nullteiliger, 133
  - parabolischer, 136