Übungen zu Analysis I

Präsenzübungsblatt

Übungsaufgabe 0.1 (Doppelbrüche) – Vereinfachen Sie folgende Doppelbrüche

(a) $\dfrac{3}{\frac{1}{2}-\frac{1}{9}} = \dfrac{3}{\frac{9}{18}-\frac{2}{18}} = \dfrac{3}{\frac{7}{18}} = 3\cdot\dfrac{18}{7} = \underline{\underline{\dfrac{54}{7}}}$

(b) $\dfrac{k-\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k}} = \dfrac{\frac{k^2-1}{k}}{\frac{k+1}{k}} = \dfrac{k^2-1}{\cancel{k}}\cdot\dfrac{\cancel{k}}{k+1} = \dfrac{k^2-1}{k+1} = \dfrac{\cancel{(k+1)}(k-1)}{\cancel{(k+1)}} = \underline{\underline{k-1}}$

Übungsaufgabe 0.2 (Bruchgleichung) – Geben Sie Definitionsmenge und Lösungsmenge folgender Bruchgleichung an.

$$\frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{x}} = 3-\frac{1}{3}$$

Da eine Division durch 0 nicht definiert ist, müssen wir $x=0$ und $x=-3$ ausschließen. Wir berechnen nun die Lösungsmenge

$$\frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{x}} = 3-\frac{1}{3} \iff \frac{1}{\frac{x+3}{3x}} = \frac{8}{3}$$

$$\iff \frac{3x}{x+3} = \frac{8}{3}$$

$$\iff 9x = 8(x+3)$$

$$\iff 9x = 8x+24$$

$$\iff \underline{\underline{x = 24}}$$

Somit ist die Lösungsmenge gegeben durch $\mathbb{L} = \{24\}$.

Übungsaufgabe 0.3 (Formel umstellen) - Stellen Sie die folgende Formel nach t_1 um. Für $s_1 \neq s_2$ und $t_1 \neq t_2$ erhalten wir

$$\bar{v} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} \iff \frac{1}{\bar{v}} = \frac{t_2 - t_1}{s_2 - s_1} \iff \frac{s_2 - s_1}{\bar{v}} = t_2 - t_1$$

$$\iff \underline{t_1 = t_2 - \frac{s_2 - s_1}{\bar{v}}}$$

Übungsaufgabe 0.4 (Wurzeln und Potenzen) - Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

(a) $$\sqrt{12} \cdot \sqrt{15} - \sqrt{125} = \sqrt{12 \cdot 15} - \sqrt{125}$$
$$= \sqrt{2^2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5} - \sqrt{5^2 \cdot 5}$$
$$= \sqrt{(2 \cdot 3)^2 \cdot 5} - \sqrt{5^2 \cdot 5}$$
$$= 6 \cdot \sqrt{5} - 5 \cdot \sqrt{5} = \underline{\underline{\sqrt{5}}}$$

(b) $$(a+b) \cdot \sqrt{\frac{1}{a^2 - b^2}} = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{a^2 - b^2}} = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{(a+b)(a-b)}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}}}$$

(c) $$\left(\frac{3x}{2y}\right)^3 \cdot \left(\frac{9x^2}{4y}\right)^{-3} = \left(\frac{3x}{2y}\right)^3 \cdot \left(\frac{4y}{9x^2}\right)^3 = \left(\frac{3x \cdot \overset{2}{\cancel{4y}}}{\cancel{2y} \cdot \underset{3}{\cancel{9x^2}}}\right)^3 = \left(\frac{2}{3x}\right)^3 = \underline{\underline{\frac{8}{27x^3}}}$$

Übungsaufgabe 0.5 (Gleichungen) - Lösen Sie folgende Gleichungen

(a) $$2x^2 + 10 = 16x - 20 \iff x^2 + 5 = 8x - 10$$
$$\iff x^2 - 8x + 15 = 0$$
$$\iff x_{1,2} = +\frac{8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 - 15}$$
$$= 4 \pm \sqrt{16 - 15} = 4 \pm 1$$

Somit sind $x_1 = 3$ und $x_2 = 5$ die Lösungen der quadratischen Gleichung

(b) $(x+1)^2 \cdot (x-5) = 0$. Da ein Produkt $a \cdot b$ reeller Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ genau dann gleich Null ist, wenn zumindest einer der Faktoren gleich Null ist, können wir die Lösungen direkt ablesen:

$$x_1 = -1, \qquad x_2 = 5.$$

Übungsaufgabe 0.6 (Logarithmen) – Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke

(a) $2 \cdot \ln(3) - \ln(6) = \ln(3^2) - \ln(6) = \ln\left(\frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{6}_{2}}\right) = \underline{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}$.

(b) $e^{\ln(3)\cdot 2} = e^{\ln(3^2)} = e^{\ln(9)} = \underline{9}$ [da $\ln(\cdot)$ die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion ist]

Übungsaufgabe 0.7 (Ungleichungen) – Geben Sie die Definitionsmenge und Lösungsmenge der folgenden Ungleichung an.

(a) $5x - 2 < 2 + 2x \iff 3x < 4$

$\iff \underline{x < \frac{4}{3}}$ d.h. $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R};\ x < \frac{4}{3}\} = (-\infty, \frac{4}{3})$

(b) $\frac{2x+1}{3x-2} < 2$. Da eine Division durch Null nicht erlaubt ist, müssen wir zunächst $x = \frac{2}{3}$ ausschließen. Da beim Umgang mit Ungleichungen darauf geachtet werden muss, ob man mit einer positiven oder negativen Zahl die Ungleichung multipliziert, ist eine Fallunterscheidung notwendig:

(i) Falls $\underline{x > \frac{2}{3}}$ ist, gilt $3x - 2 > 0$ und damit

$$\frac{2x+1}{3x-2} < 2 \iff 2x + 1 < 2(3x-2)$$
$$\iff 2x + 1 < 6x - 4$$
$$\iff 5 < 4x$$
$$\iff \underline{x > \frac{5}{4}}$$

Damit erhalten wir als erste Teillösung

$$\mathbb{L}_1 = \{x \in \mathbb{R};\ x > \tfrac{2}{3} \text{ und } x > \tfrac{5}{4}\} = \{x \in \mathbb{R};\ x > \tfrac{5}{4}\} = (\tfrac{5}{4}, \infty)$$

(ii) Falls $\underline{x < \frac{2}{3}}$ ist, gilt $3x - 2 < 0$ und damit

$$\frac{2x+1}{3x-2} < 2 \iff 2x + 1 > 2(3x-2)$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2x+1 > 6x-4$$
$$\Longleftrightarrow \quad 5 > 4x$$
$$\Longleftrightarrow \quad x < \frac{5}{4}$$

Damit erhalten wir als zweite Teillösung

$$\mathbb{L}_2 = \{x \in \mathbb{R}\,;\ x < \tfrac{2}{3} \text{ und } x < \tfrac{5}{4}\} = \{x \in \mathbb{R}\,;\ x < \tfrac{2}{3}\} = (-\infty, \tfrac{2}{3})$$

Insgesamt ist damit die Lösungsmenge gegeben durch

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{x \in \mathbb{R}\,;\ x < \tfrac{2}{3} \text{ oder } x > \tfrac{5}{4}\} = \underline{(-\infty, \tfrac{2}{3}) \cup (\tfrac{5}{4}, \infty)}.$$

<u>Übungsaufgabe 0.8</u> (Differentialrechnung) – Leiten Sie folgende Funktionen ab:

(a) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x^5 \cdot \cos(x)$. Wir verwenden die Produktregel $[(u \cdot v)' = u'v + v'u]$ und erhalten $f': \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f'(x) = 15x^4 \cdot \cos(x) + 3x^5 \cdot (-\sin(x))$$
$$= \underline{3x^4 \cdot (5 \cdot \cos(x) - x \cdot \sin(x))}.$$

(b) $f: [-\frac{7}{6}, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{6x+7}$. Wir verwenden die Kettenregel $[f(x) = g(h(x)) \Longrightarrow f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)]$ und erhalten $f': [-\frac{7}{6}, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = (6x+7)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (6x+7)^{-\frac{1}{2}} \cdot (6+0)$$
$$= \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6x+7}} \cdot \cancel{6}_3 = \underline{\frac{3}{\sqrt{6x+7}}}$$