

§ A review of compactness

Def. A metric space (X, d) is topologically compact if every open cover admits a finite subcover.

Def. A subset $A \subset X$ is bounded if it is contained in a ball.

Def. (X, d) is totally bounded if for all $\varepsilon > 0$ there exists $x_1, \dots, x_n \in X$ s.t. $X \subset \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$.

Theorem. (X, d) is compact if and only if it is complete and totally bounded.

Def. A subset $A \subset X$ is precompact if its closure $\bar{A}$ is compact.

Using the axiom of choice gives:

Proposition. Let (X, d) be a metric space and let $A \subset X$.

Then the following are equivalent:

- (i) A is precompact.
- (ii) Every sequence in A has a subsequence that converges in X .
- (iii) A is totally bounded and every Cauchy sequence in A converges in X .

Proof. See Bühler & Salamon, Corol. 1.1.8.

Proposition. Let (X, d) be a complete metric space and $A \subset X$.

Then the following are equivalent:

- (i) A is precompact
- (ii) Every sequence in A has a Cauchy subsequence.
- (iii) A is totally bounded.

Def. Let (X, d) and (Y, ρ) be metric spaces.

Then $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ is uniformly equicontinuous if for all $\varepsilon > 0$ there exists $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ s.t.

for all $f \in \mathcal{F}$ and $x, x' \in X$,

$$d(x, x') < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Theorem (Arzelà-Ascoli)

Let X be a compact metric space and Y be a metric space.

A subset $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ is compact if and only if it is closed, bounded and equicontinuous.

NB: if $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ is compact, then every sequence $(f_j) \subset \mathcal{F}$ has a subsequence that converges uniformly on compact subsets of X .

Re-wording of the Arzelà-Ascoli result:

For every sequence of ^{continuous} functions (f_j) which are uniformly bounded and uniformly equicontinuous, there exists a subsequence (f_{j_k}) and a continuous u such that $f_{j_k} \rightarrow u$ uniformly on compact subsets.

main points of the proof:

$$\begin{cases} \text{equicontinuity \& boundedness} \Rightarrow \text{total boundedness} \\ \text{total boundedness} \Rightarrow \text{equicontinuity} \end{cases}$$

i.e. the total boundedness of a subset of $C(X, Y)$ is equivalent to boundedness and equicontinuity.

Definition. A Banach space B_1 is said to be compactly embedded into a Banach space B_2 if the imbedding operator $I: B_1 \rightarrow B_2$ is compact, i.e. if the image of bounded sets in B_1 are precompact in B_2 .

(we write $B_1 \subset\subset B_2$ to denote B_1 compactly embedded in B_2 .)

Theorem (Kondrachev, 1945)

The following embeddings

$$W_0^{k,p}(\Omega) \rightarrow \begin{cases} L^q(\Omega) & \text{for } 1 \leq q < \frac{1}{\frac{1}{p} - \frac{n}{k}}, \text{ when } 1 \leq p < \frac{n}{k} \\ L^\infty(\Omega) & \text{for } 1 \leq q < \infty, \text{ when } 1 < p = \frac{n}{k} \\ C^m(\bar{\Omega}) & \text{for } 0 \leq m < k - \frac{n}{p}, \text{ when } p > \frac{n}{k} \end{cases}$$

are compact. In particular $\bigwedge W_0^{k,p}(\Omega) \rightarrow C^0(\Omega)$ is compact for all $1 \leq p \leq \infty$.
the imbedding

NB: $C^m = C^{l,u}$ where $m = l + \alpha$ and $\left\{ \begin{matrix} 0 \leq l < k - \frac{n}{p} \\ 0 \leq \alpha < k - \frac{n}{p} - l \end{matrix} \right\} \Rightarrow 0 \leq m < k - \frac{n}{p}$.
(for $l \in \mathbb{N}_0$ and $0 \leq \alpha < 1$)

Proof. We first remark that the 3rd part is a direct consequence of Morrey's theorem and the Arzela-Ascoli theorem.

Hence we seek to prove the 1st part initially for the case $q=1$ and $k=1$.

1. Let A be a bounded set in $W_0^{1,p}(\Omega)$, i.e. $\sup_{u \in A} \|u\|_{1,p;\Omega} < +\infty$.
W.l.o.g. assume that $A \subset C_c^\infty(\Omega)$ and $\|u\|_{1,p;\Omega} \leq 1$ for all $u \in A$.

2. For fixed $\varepsilon > 0$, define $A_\varepsilon = \{u_\varepsilon : u \in A\}$ where $u_\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$ is "the regularisation of u ".

Claim A. For each fixed $\varepsilon > 0$, the set A_ε is a uniformly bounded and equicontinuous subset of $C^0(\bar{\Omega})$.

Proof of Claim A. For if $u \in A$, then

$$|u_\varepsilon(x)| \leq \int_{|z| \leq \varepsilon} \eta(z) |u(x-z)| dz \leq \frac{1}{\varepsilon^n} \sup \eta \|u\|_1$$

and

$$|Du_\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{|z| \leq \varepsilon} |D\eta(z)| |u(x-z)| dz \leq \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \sup |D\eta| \|u\|_1$$

from which the claim now follows.

(NB: By the fundamental theorem of calculus we have

that $|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)| \leq C_\varepsilon |x-y|$, where $C_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \sup |D\eta| \|u\|_1$,
from which equicontinuity now follows.)

□

Therefore A_ε is precompact in $C^0(\bar{\Omega})$ by the Arzelà-Ascoli theorem.

Consequently A_ε is also precompact in $L^1(\Omega)$.

(NB: $\|\cdot\|_\alpha$ is stronger than $\|\cdot\|_1$)

3. Claim B. u_ε is uniformly close to u in $L^1(\Omega)$ for each $u \in A$.

Proof of Claim B. We may estimate for $u \in A$,

$$\begin{aligned} |u(x) - u_\varepsilon(x)| &\leq \int_{|z| \leq 1} \eta(z) |u(x) - u(x - \varepsilon z)| dz \\ &\leq \int_{|z| \leq 1} \eta(z) \int_0^{\varepsilon|z|} |Du(x - w)| dw dz, \quad w = \frac{z}{|z|} \end{aligned}$$

then by integrating over x we obtain:

$$\int_\Omega |u(x) - u_\varepsilon(x)| dx \leq \varepsilon \int_\Omega |Du| dx \leq \varepsilon |\Omega|^{1-\frac{1}{p}}.$$

4. Since we have shown that A_ε is totally bounded in $L^1(\Omega)$ for all $\varepsilon > 0$, i.e. Claim A, it follows that A is also totally bounded in $L^1(\Omega)$ and hence pre-compact.

5. To extend the result to arbitrary $q < \frac{np}{n-p}$, we estimate

$$\begin{aligned} \|u\|_q &\leq \|u\|_1^{\frac{1-\lambda}{p}} \|u\|_p^{\frac{\lambda}{p}} \quad \text{where } \lambda + (1-\lambda)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) = \frac{1}{q} \\ &\leq \|u\|_1^{\frac{1-\lambda}{p}} (C \|Du\|_p)^{\frac{\lambda}{p}} \quad \text{by the Sobolev embeddings.} \end{aligned}$$

Consequently a bounded set in $W_0^{1,p}(\Omega)$ must be precompact in $L^q(\Omega)$ for $1 \leq q < \frac{np}{n-p}$.

Recall that if $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ and $k \in \mathbb{N}$ then

we have the continuous embeddings

$$C^{k,1}(\bar{\Omega}) \subset C^{k,\beta}(\bar{\Omega}) \subset C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}) \subset C^k(\bar{\Omega}).$$

Remark. The Kondrachev embedding theorem is an example of a more general principle that a bounded sequence in a space of higher regularity with support in a compact domain are often/should be compact in a space of lower regularity.

Lemma. Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be open and bounded.

If $0 < \alpha < \beta \leq 1$, then the embeddings

$$C^{0,\beta}(\bar{\Omega}) \rightarrow C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$$

is compact.

Proof. Let $(f_j) \subset C^{0,\beta}(\bar{\Omega})$ with $\|f_j\|_{C^{0,\beta}(\bar{\Omega})} \leq k$.

i.e. uniformly bounded on a compact set & (by assumption) equicontinuous.

Then Arzelà-Ascoli implies $(f_j) \subset C(\bar{\Omega})$ is compact, i.e.

$\exists (f_{j_k})$ s.t. $f_{j_k} \rightarrow f$ uniformly. w.l.o.g. assume $f = 0$.

This subsequence furthermore converges in $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, since

$$\begin{aligned} \frac{|f_{j_k}(x) - f_{j_k}(y)|}{|x-y|^\alpha} &\leq \left(\frac{|f_{j_k}(x) - f_{j_k}(y)|}{|x-y|^\beta} \right)^{\frac{\alpha}{\beta}} |f_{j_k}(x) - f_{j_k}(y)|^{1-\frac{\alpha}{\beta}} \\ &\leq 2k \|f_{j_k}\|_{C^{0,\beta}(\bar{\Omega})}^{1-\frac{\alpha}{\beta}} \\ &\rightarrow 0 \text{ as } j_k \rightarrow \infty \text{ uniformly } \forall x, y \in \bar{\Omega}. \end{aligned}$$

PHYSIQUE

- J. B. Friedman and T. A. Volodina. On the Strength and Ductility of Quenched and Tempered Steel 544
I. I. Kitaigorodsky. Electron Microscope and Investigation of the Structure of Ceramic Materials 545

CHIMIE PHYSIQUE

- G. V. Akimov, Corresponding Member of the Academy, and Z. L. Mintz. Structure of Austenitic Heat-resistant Steel. Processes Involved in the Aging of Hardened EI-69 Steel 546
K. K. Andreev and A. P. Bakeev. On the Dependence of the Burning Velocity of Smokeless Powders upon the Pressure 547

CHIMIE BIOLOGIQUE

- A. V. Blagoveschensky and A. J. Kologrivova. Activation of Catalase by Biogenic Stimulants 551
M. V. Fedorov. Intensity of Fixation of Atmospheric Nitrogen by *Azotobacter* on Different Sources of Carbon 552
A. Passynsky and V. Plaskeyev. Diffusion and Molecular Weight of Lysozyme 553

GÉOLOGIE

- E. V. Pavlovsky and G. K. Semiguzov. Quaternary Glaciation of the Sunnaghin Range (South Yakutia) 553
A. N. Solovkiu. New Data on the Occurrence of Ores in the Intrusion of the Little Caucasus (Azerbaijan SSR) 554

MINÉRALOGIE

- A. M. Kuznetsov and D. P. Prochukhan. On the Formation of Columnar Calcite 557
N. V. Renngarten. A Zeolite from the Mordenite Group in the Upper Cretaceous and Palaeogene Marine Deposits of the Eastern Slope of the Urals 558

PHYSIOLOGIE

- T. I. Privolnev. Skin Respiration in *Carassius carassius* 559
A. A. Shufova. Phagocytic Activity of Leucocytes as Affected by Serums Containing Leucocytic Trephones 562

ENDOCRINOLOGIE

- P. A. Wunder. On the Influence of Estrogens upon the Thyrotropic Reaction 602

MORPHOLOGIE EXPÉRIMENTALE

- G. V. Lopashov. On some Simplest Processes of Organization of Eye and Brain Rudiment in Urodelan Embryos 605

PARASITOLOGIE

- M. N. Nikolskaia. Evolution of *Eurytoma* Species (*Hymenoptera*, *Chalcididae*) in Connexion with the Geographical Distribution of their Food-plants of the subfam. *Franoideae* 609

Traductions rédigées par D. Rakhmanov et T. Rogalina

Édition de l'Académie des Sciences de l'URSS
Moscou 1945

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1945. Volume XLVIII, N° 8

MATHÉMATIQUES

SUR CERTAINES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS DANS L'ESPACE

Par W. KONDRACHOV

(Présenté par S. L. Soboleff, de l'Académie, le 21. VI. 1945)

L_p^v ($p \geq 1$) est l'espace fonctionnel linéaire des fonctions $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ définies dans un domaine D de l'espace à n dimensions et dont les S -dérivées* jusqu'à l'ordre v sont à p sommables ($^1, ^2$). Dans la présente Note D est un domaine borné sauf les cas que nous signalerons particulièrement.

1. Introduisons dans L_p^v une métrique au moyen de la formule

$$\rho(\varphi, \psi) = \left[\int_D \dots \int \sum_{l=0}^v \sum_{\Sigma l=l} \left| \frac{\partial^l (\varphi - \psi)}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_n^{a_n}} \right|^p dx_1 \dots dx_n \right]^{\frac{1}{p}}$$

2. Indiquons quelques propriétés simples des espaces considérés:

- a) L_p^v est un espace complet;
b) si l'on a pour tous les α simultanément

$$\frac{\partial^\alpha \varphi_i}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_n^{a_n}} \text{ faiblement } \rightarrow \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_n^{a_n}}$$

au sens de l'espace L_p ($\sum a_j = \alpha = 0, 1, \dots, v$), il en résulte que $\varphi_i \xrightarrow{\text{faiblement}} \varphi$ dans L_p^v ($p > 1$);

c) la sphère $\rho(0, \varphi) \leq A$ est faiblement compacte dans L_p^v ($p > 1$).

On désigne dans la suite par $\bar{L}_p^v$ la multiplicité linéaire de tous les éléments de L_p^v qui sont des fonctions possédant des dérivées continues jusqu'au v -ième ordre. On a

d) $\bar{L}_p^v$ est partout dense dans L_p^v .

Pour les domaines D dont chaque point est accessible au moyen d'un secteur sphérique mobile dont la forme et la grandeur sont fixes, S. Soboleff a démontré le théorème suivant.

3. La sphère unitaire de L_p^v est une partie de la sphère: 1) de chaque espace $L^{v-k}_{q^{**}}$ si $1 > 1/p > k/n$; 2) d'un espace $L^{v-k}_{q^{**}}$ quelconque, $q^{**} > 0$, si

$$\frac{1}{p} - \frac{k}{n}$$

* On appelle S -dérivés les dérivés au sens de S. Soboleff [voir (1), p. 483].

1) $1/p = k/n$; 3) de chaque espace $L_{q^*}^{v-k}$, où $q^* < q = 1/(1-k/n)$, si $p=1$; 4) d'un espace arbitraire $C^{v-k} = C^{v-[n/p]-1}$, si $1/p < k/n^*$; enfin, 5) de l'espace C pourvu que $n=k$, $p=1$.

4. Dans la présente Note on établit la proposition fondamentale suivante: L'ensemble $\rho(0, \varphi) \leq A$, borné dans L_p^v , est compact dans les ensembles suivants qui le contiennent: 1) dans $L_{q^*}^{v-k}$, $q^* < q = 1/(1/p - k/n)$, si $1 > 1/p > k/n$; 2) dans $L_{q^{**}}^{v-k}$, $q^{**} > 0$, quand $1 > 1/p = k/n$; 3) dans $L_{q^*}^{v-k}$, $q^* < q = 1/(1/p - k/n)$, si $1 > 1/p > k/n$, si $p=1$; 4) dans $C^{v-k} = C^{v-[n/p]-1}$, où $1/p < k/n$ (*, **).

Dans le cas où $p > 1$ les fonctions φ limites des suites φ_i que l'on peut extraire en vertu de la compacité indiquée, appartiennent à L_p^v . La convergence des v -ièmes dérivées des éléments φ_i vers les S -dérivées de la fonction φ est faible (au sens de L_p^v).

On peut modifier les énoncés des théorèmes 3 et 4 pour L_p^v . Considérons l'ensemble des fonctions φ vérifiant les conditions:

$$1) \int \dots \int_{S_{n-1}} \left| \frac{\partial^l \varphi(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} \right| dS_{n-1} \leq A \quad (\sum i_k = l = 0, 1, \dots, v-1)$$

S_{n-1} est un morceau d'une multiplicité unie à $n-1$ -dimensions, situé bien dans D , ou bien sur la frontière de D ; $x_1, \dots, x_n$ est un point intérieur à D , proche du point de S_{n-1} , qui lui correspond:

$$2) \int \dots \int_D \sum_{\alpha=1}^n \left| \frac{\partial^v \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right|^p dx_1 \dots dx_n \leq A$$

L'ensemble ainsi extrait est borné dans L_p^v .

5. Considérons l'espace L_p^k . Supposons que les fonctions $\varphi \in L_p^k$, $\rho(0, \varphi) \leq A$, sont nulles hors du domaine D . Convenons de désigner dans la suite par C avec des indices inférieurs différents des constantes différentes, qui ne dépendent pas des fonctions considérées et des quantités h_1 et δ introduites. Posons encore $M+h = (x_1+h, \dots, x_n+h)$; $M = (x_1, \dots, x_n)$, $dx_1 \dots dx_n = dm$. Posons $\max |h_i| = \delta$ ($i=1, 2, \dots, n$). On a les évaluations suivantes.

a) Le domaine D est borné

$$\int \dots \int_D |\varphi(M+h) - \varphi(M)|^{q^*} dm \leq C_{01} \begin{cases} \delta^{(1-q^*/q)}, & \frac{1}{q^*} > \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}, \quad p > 1, \quad \frac{1}{p} > \frac{k}{n} \\ \delta^{(1-q^*/q^{**})}, & q^{**} > 0 \text{ quelconque}, \quad \frac{1}{p} = \frac{k}{n} \\ \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p} = \frac{1}{q^*} \left(\frac{n-1}{n} \right), & p_1 \text{ donne } q^* \\ \delta^{(1-q^*/q_1^*)}, & q^* < q_1^* < \frac{1}{1-\frac{k}{n}}, \quad p=1 \end{cases}$$

* Pour $n=2$ et en considérant une classe de domaines D plus restreinte, Reich (Göttingen) a démontré la compacité de L_2 dans L_2 seulement.

b) Le domaine D est tout l'espace dont on peut enlever des morceaux d'une multiplicité assez unie de dimension inférieure à n .

$$1 < p \leq \frac{n}{k}$$

$$\int \dots \int_D |\varphi(M+h) - \varphi(M)|^{q^*} dm \leq C_{02} \begin{cases} \delta^{q^*} & \frac{1}{q^*} > \frac{1}{p} - \frac{k-1}{n} \\ \delta^{q^*} |\ln \delta|^{\frac{q^*(p-1)}{p}} & \frac{1}{q^*} = \frac{1}{p} - \frac{k-1}{n} \\ \delta^{q^*} \left[k-n \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \right] & \frac{1}{q^*} < \frac{1}{p} - \frac{k-n}{n} \end{cases}$$

Si $p = \frac{n}{k}$, il faut appliquer les évaluations en prenant $p' < p$ de sorte

$$\text{que } 1/p_1 - 1/p = \frac{1}{q^*} \left(\frac{n-1}{n} \right).$$

$$p=1$$

$$\int \dots \int_D |\varphi(M+h) - \varphi(M)|^{q^*} dm \leq C_{03} \delta^{q^*(1-\varepsilon)}, \quad \frac{1}{q^*} > 1 - \frac{k+\varepsilon-1}{n}$$

c) $p > n/k$ (*, **), $k = (m+n)/p$, $m > 0$.

$$|\varphi(M+h) - \varphi(M)|^p \leq C_{04} \begin{cases} \delta^m & m < p \\ \delta^p |\ln \delta|^{p-1} & m = p \\ \delta^p & m > p \end{cases}$$

Il est utile d'indiquer tout de suite brièvement le plan de la démonstration. On raisonne pour $\overline{L}_p^k$. On affirme que les évaluations précédentes sont vraies. Les inégalités 5a) et 5c), ainsi que les formules 1) - 4) du § 3 per-

mettent d'appliquer le théorème de Ritz (condition de la compacité dans L_p) et d'Arzela pour démontrer la proposition dans les domaines bornés. Ce qui est établi subsiste en tout cas dans chaque partie bornée des domaines non bornés que l'on considère. Les fonctions moyennes permettent de transporter le résultat dans L_p^v . Dans cette direction on peut, en s'appuyant sur les propriétés des espaces (que l'espace est complet, etc.), utiliser le théorème de Fréchet.

Indiquons seulement l'idée de la démonstration des évaluations indiquées. Cette idée est basée sur l'application de l'identité de S. Soboleff (*), qui représente la valeur d'une fonction φ dans le sommet d'un certain secteur au moyen des valeurs des dérivées à l'intérieur d'un tel secteur; au cours de la démonstration il est commode d'utiliser le théorème de S. Soboleff sur les intégrales du type de potentiel (*).

Indiquons encore qu'en généralisant le théorème fondamental sur les intégrales du type de potentiel (*), sans perdre de vue le sens des raisonnements faits, on peut obtenir pour $\overline{L}_p^v$ des évaluations liées aux multiplicités à un nombre diverse de dimensions (ces évaluations complètent celles qui ont été publiées dans (*, **)).

On peut aussi généraliser dans la direction de la présente Note les théorèmes de I. Petrovsky et K. Smirnov (sur les fonctions également continues). Des relations analogues aux inégalités de Friedrichs permettent de lier l'énoncé de la proposition 4 avec les conditions concernant les espaces à $n-1$ dimensions. Quelques applications des résultats exposés seront considérés séparément.

Manuscrit reçu
le 21. VI. 1945.

LITTÉRATURE CITÉE

¹ S. Soboleff, *Rec. Math.*, 4 (46), № 3 (1938). ² S. Soboleff, *C. R. Acad. Sci. URSS*, I (X), 7 (84), 267 (1936); ³ W. Kondrachoff, *C. R. Acad. Sci. URSS*, XVIII, 236 (1938).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1945. Volume XLVIII, № 8

MATHEMATICS

THE AFFINE CONNECTIVITY ON THE SURFACES OF A PROJECTIVE AND CONFORMAL SPACE

By A. NORDEN

(Communicated by A. N. Kolmogoroff, Member of the Academy, 13. X. 1944)

The surface X_m of m dimensions embedded in P_n^* we shall call normalized, if with every of its points $**$ are connected two projective planes: 1) P_{n-m} containing this point and not incidental with the tangent plane T_m of the surface; 2) P_{m-1} belonging to T_m but not containing the point of the surface.

We shall call these planes normalizing manifolds of the first and the second kind and denote them by I and II, respectively; the normalized surface we shall denote by A_m .

Introducing on A_m curvilinear coordinates $u^i, i=1, 2, \dots, m$, we define the plane II by the k points

$$y_i^a = \partial_i x^a - l_i x^a \quad (1)$$

belonging to this plane.

When x^a is multiplied by the functional factor σ , the vector l_i may undergo a transformation according to the following law

$$\tilde{l}_i = l_i + \partial_i \lg \sigma$$

if the plane II remains invariant.

The plane I we define by $n-m+1$ independent points

$$x^a, \quad X_s^a, \quad s=1, 2, \dots, n-m$$

The independence of the points x^a, y_i^a, X_s^a enables us to state the equal

$$\partial_{ij} y_i^a = A_{ij}^k y_k^a + p_{ij} x^a + \sum_{s=1}^{n-m} B_{ij}^s X_s^a$$

where p_{ij} and B_{ij} are tensors.

Alternating by the indices i and j and taking into account the equation (1), we find the symmetry of the expressions

$$G_{ij}^k = A_{ij}^k - l_j \delta_i^k$$

with respect to these indices.