

Preis für hervorragende Lehre 2016/17

Formular für die Beschreibung der von Ihnen eingereichten Lehrveranstaltung

Bitte beachten Sie:

- Dieses Dokument sollte insgesamt nicht mehr als vier Seiten umfassen.
- Anhänge sind möglich; die wesentlichen Informationen sollten aber hier, in diesem Dokument, enthalten sein. Es ist nicht gewährleistet, dass die Jurymitglieder die Anhänge im Detail durchsehen!
- Jedenfalls sollte die Beschreibung Ihrer LV in PLUSonline vollständig sein!
- Speichern Sie dieses Dokument bitte nach dem Muster
[Semester – LV-Nummer – Nachname/n des/der Lehrenden.docx]
also bspw. so [16s - 407.379 - Kant und Popper.docx] ab.
- Senden Sie die Beschreibung bis spätestens 5. April an Karin.Wallner@sbg.ac.at

Eckdaten – LV-Nummer, LV-Titel, Name des/der Lehrenden, Semester, Fachbereich

LV-Nummer: 405.500

LV-Titel: Fraktale und Zufall

Lehrender: Wolfgang Trutschnig

Semester: 2016W

Fachbereich: Mathematik

Allgemeine Beschreibung – Hintergrund, Studierende, Lernziele, Inhalte, ...

Hintergrund & Studierende:

Die zweistündige Spezialvorlesung „Fraktale und Zufall“ kann von Mathematikstudierenden sowohl im Bachelor als auch im Master- und im Doktoratsstudium als Wahlfach belegt werden. Die VO setzt solide Kenntnisse aus den Grundvorlesungen Analysis I-III und Statistik (für Bachelor) voraus, und ist daher nur für Studierende, die kurz vor dem Abschluss des Bachelor Studiums stehen oder im Studium schon weiter fortgeschritten sind, zu empfehlen.

Inhalte:

Die Vorlesung ist getriggert und geleitet von einem der faszinierendsten stochastischen Prozesse in der Mathematik, dem sogenannten **Chaos Game** (siehe [wikipedia](#) und/oder [slides_trutschnig](#)) - einem **zufälligen Spiel**, das bei geeigneter Kalibrierung **selbstähnliche fraktale Objekte**, also Objekte, die bei beliebiger Vergrößerung immer wieder die gleiche Struktur aufweisen (siehe [wikipedia](#)), zum Vorschein bringt. Trotz des offensichtlichen Zufallseinflusses - in jedem Schritt wird eine Funktion aus einem sog. iterierten Funktionensystem mit Wahrscheinlichkeiten (kurz IFSP) zufällig gewählt - entsteht nach hinreichend vielen Schritten auf a priori unerklärliche Art und Weise immer wieder ein und dieselbe fraktale Struktur, und damit nicht nur ein spannendes mathematisches Objekt, sondern auch etwas für das Auge (siehe beispielsweise [transforming dragons](#)). Motiviert durch zahlreiche, mit den Studierenden in der Softwareumgebung R **selbständig durchgeführte Chaos-Game-Experimente** mit unerwarteten (dafür graphisch umso ansprechenderen) Ausgängen ist das **Hauptziel der VO, mathematisch zu verstehen, warum das Chaos Game „funktioniert“**.

Geleitet von dieser einen Hauptfragestellung werden die mathematisch notwendigen (topologischen und wahrscheinlichkeitstheoretischen) Werkzeuge entwickelt, mit Hilfe derer es Woche für Woche klarer wird, warum das Chaos Game das tut, was es tut. Nach einem Exkurs in die topologische Dynamik schließt die VO mit einem mathematischen Beweis der Haupteigenschaften, bestätigenden Simulationen in R, einem Ausblick in die Ergodentheorie (Teilgebiet der Mathematik, das noch stärkere als die in der VO bewiesenen Eigenschaften studiert), und verwandten aktuellen Problemstellungen in der Forschung.

Lernziele & erworbene Kompetenzen:

Die Studierenden verstehen IFSP-basierte Techniken zur Konstruktion von Fraktalen, können, ausgehend vom Fraktal, das zugrundeliegende IFSP (approximativ) ableiten, das entsprechende Chaos Game in R implementieren und die Funktionalität des Chaos Games mathematisch begründen. Die Studierenden sind in der Lage, dynamische Eigenschaften chaotischer, stetiger Abbildungen auf Fraktalen mittels Übersetzung auf entsprechende symbolische dynamische Systeme zu analysieren. Die Studierenden können komplexe Problemstellungen in lösbare Teilprobleme zerlegen und verstehen die dadurch gegebene Notwendigkeit der engen Vernetzung mathematischer Teilgebiete.

Stellen Sie in der Folge bitte dar, wie Sie die Kriterien der Ausschreibung im Rahmen der von Ihnen eingereichten Lehrveranstaltung erfüllen!

An die Studierenden werden **Lernanforderungen** gestellt, mit denen über die reine Faktenvermittlung hinaus kritisches, kreatives und problemlösendes Denken vermittelt wird.

Die erste VO beginnt mit der Beobachtung des „Chaos Game at work“, einer **Implementierung des Chaos Games in der Softwareumgebung R, die in jedem Durchlauf dieselbe mathematische Struktur zum Vorschein bringt: Das Sierpinski Dreieck** (siehe [wikipedia](https://de.wikipedia.org/wiki/Sierpinski-Dreieck)), eines der bekanntesten und ältesten selbstähnlichen Fraktale. Gemeinsam mit den Studierenden werden **Vermutungen** darüber erarbeitet, was das verwendete IFSP mit dem Sierpinski Dreieck zu tun haben könnte. Die Richtigkeit der Vermutungen wird interaktiv mittels Simulationen für andere selbstähnliche Fraktale (Menger Schwamm, Cantor Menge, etc.) überprüft.

Die durch die Simulationen schließlich bestätigten Ideen werden als **to-do Liste** formuliert, diese to-do Liste wird dann problemlösungsorientiert **Schritt für Schritt** in den darauffolgenden Wochen abgearbeitet. Auf diese Art und Weise haben die Studierenden (und der Vortragende) ein **klares Ziel** mit mehreren spannenden und **lohnenden Zwischenetappen** vor Auge, Definitionen und Theoreme fallen (wie in der Mathematik teilweise leider nicht unüblich) nicht vom Himmel, sondern sind durch das präzise formulierte Ziel und die Zwischenetappen klar motiviert. Darüber hinaus wird die (insbesondere für die spätere berufliche Entwicklung der Studierenden wichtige) **Methodik der Zerlegung einer großen Problemstellung in kleine, bewältigbare Zwischenetappen** praktisch umgesetzt.

Alle in der VO erarbeiteten Resultate werden kritisch hinterfragt. Zusätzlich erhalten die Studierenden **freiwillige Übungsaufgaben** (unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades) **theoretischer und angewandter Natur**, wobei in den ersten Wochen der Fokus der Übungen primär darauf gerichtet ist, ausgehend von einem gegebenen Fraktal das zugrundeliegende IFSP herzuleiten und selbst zu implementieren (**Kreativität**), während in den darauffolgenden Wochen erweiternde Resultate selbst bewiesen und Gegenbeispiele für mögliche Verallgemeinerungen/Verschärfungen kennengelernter Theorem erarbeitet werden (**kritisches Hinterfragen**). Trotz der Vorlesungsstruktur können gelöste Übungsaufgaben von den Studierenden freiwillig präsentiert werden – für jede präsentierte Aufgabe (bis zu einer Maximalanzahl von drei) darf sich der/die Studierende bei der mündlichen Prüfung eine (der insgesamt 8-10) Frage(n) aussuchen.

Abgesehen von der klaren inhaltlichen Struktur und der Zielsetzung unterstreicht die VO die Relevanz und die **breite Anwendbarkeit von Theoremen und Konstruktionen**, die schon aus Grundvorlesungen bekannt sind, deren Wichtigkeit aber ob der schieren Anzahl der gelernten Resultate oftmals unterschätzt wird (Schlüsselfrage: Wofür soll ich dieses Resultat jemals brauchen können?). **Querverbindungen und Analogien zu anderen LVA** werden herausgearbeitet, **wiederkehrende Beweisideen/Beweisstrukturen werden problemadäquat adaptiert** und angewandt, die Nützlichkeit mathematischer Abstraktion wird anhand des „Übersetzens“ kompliziert scheinender dynamischer Systeme eindrucksvoll illustriert. Verwandte Problemstellungen, an denen aktuell international geforscht wird, werden explizit skizziert, quasi-fraktale Strukturen in der Natur (Farn, Brokkoli, etc.) werden diskutiert.

In der Lehrveranstaltung wird **aktives Lernen** gefördert, etwa durch Gruppenarbeiten, Diskussionen, problemlösendes Lernen, interaktive Übungen, kollaborative Arbeiten auf Blackboard und andere aktivierende Methoden. In **nicht-prüfungsimmanenten Lehrveranstaltungen (=VO)** wird das Lernen der Studierenden insbesondere durch eine Verbindung von gelebter Begeisterung der/des Lehrenden für das Fach mit guter Strukturierung und Klarheit des Vortrages, durch Skripten und multimediale Lernmaterialien von hoher instruktiver Qualität oder auch durch den Einsatz von aktivierenden Methoden schon während der Vorlesung gefördert.

Die VO „Fraktale und Zufall“ ist weder ein reines „Vorlesen“ noch ein reiner, als Frontalvortrag an der Tafel getarnter Monolog. Grundidee von Vorlesungen insbesondere in der Mathematik muss es sein, weg vom reinen Mitschreiben und Sammeln der zu lernenden Informationen und hin zum **Verstehen zugrundeliegender Ideen** zu kommen. Diesem Gedanken folgend werden die Studierenden schon ab der ersten VO explizit dazu ermutigt, **Zwischenfragen zu stellen** und die erarbeiteten Inhalte **kritisch** (hinsichtlich Ihrer Anwendbarkeit, Interpretation und Verschärfbarkeit) zu **hinterfragen**. Insbesondere willkommen sind **alternative Beweisideen**, die spontan und gemeinsam an der Tafel diskutiert und auf Korrektheit überprüft werden.

Die Präzision mathematischer Aussagen bringt es mit sich, dass technische und langwierige Beweise nicht immer vermieden werden können – eine klare Beweisidee/Vorgangsweise im Hinterkopf zu haben erhöht die Ausdauer und schärft den **Blick auf das Wesentliche**. Genau dieses, für die moderne Arbeitswelt (Stichwort: Big Data) mehr denn je zuvor erforderliche **analytische Denken** ist einer der Hauptgründe für die sehr guten Berufsaussichten von MathematikerInnen.

Jede Vorlesungseinheit (ab der zweiten) beginnt mit einer knapp **zehnminütigen Wiederholung** der Hauptresultate der vorigen Woche und der Skizzierung der anstehenden Schritte in Richtung Hauptziel der VO, dem Verstehen des Chaos Games. Auch auf die Gefahr hin, antiquiert und – insbesondere außerhalb der Mathematik – ineffizient zu erscheinen, findet der Großteil der VO (ca. 75%) mit **Tafel und Kreide** statt. Nur auf diese Weise ist sichergestellt, dass die Studierenden aktiv mitdenken können, und etwaige wichtige Punkte nicht einfach auf den Folien „überblättert“ werden. Dazu kommt, dass das Tafellöschen eine natürliche, für die Konzentration förderliche Durschnaufpause (sowohl für Studierende als auch Lehrende) darstellt. Die verbleibenden ca. 25% werden für **Simulationen und Visualisierungen der Hauptresultate am Laptop** (verbunden mit dem Beamer) verwendet. Bilder attraktiver Fraktale und Übungsaufgaben werden in Papierform an die Studierenden verteilt, die in den Simulationen verwendeten, **selbstgeschriebenen open source Programme** können jederzeit von der homepage (trutschnig.net) heruntergeladen und für eigene Experimente modifiziert werden.

Auf eine oder zwei Einheiten beschränkte, von Studierenden angeregte „Exkursionen“ in eng verwandte Problemstellungen, die sich in natürlicher Weise aus den erarbeiteten Resultaten ergeben, sind nicht nur willkommen sondern explizit erwünscht. Im ersten Jahr der VO wünschten sich die Studierenden einen kurzen Exkurs in die topologische Dynamik und die chaotischen Eigenschaften stetiger Abbildungen - mittlerweile ist selbiger Exkurs fixer Bestandteil der VO.

Zurückblickend auf das eigene Mathematikstudium war nichts lernhinderlicher als Vortragende, die jedes Theorem und jedes Konzept als trivial dargestellt, Wort für Wort von Unterlagen abgeschrieben oder Vorlesungen auswendig gelernt, und damit jegliche spannende Diskussion unterbunden haben. Trotz der natürlichen **Entwicklung der modernen Mathematik in Richtung Abstraktion und Strukturanalyse** liegen vielen hochgradig komplexen Theorien und Resultaten **sehr einfache, sich zum Teil wiederholende intuitive Ideen** zugrunde – es ist Aufgabe der Lehrenden, genau diese Ideen, ergänzt um das notwendige Handwerkszeug bestmöglich zu vermitteln.

Die gesetzten **Lehr-/Lernaktivitäten** sind an den **Lernzielen** der Lehrveranstaltung orientiert und auf einander abgestimmt.

Wie in der inhaltlichen Beschreibung skizziert, hat die gesamte LVA ein klares Ziel vor Augen: Mathematisch begründen zu können, warum das Chaos Game „funktioniert“. Als direkte Konsequenz daraus ergibt sich unweigerlich eine **nahtlose Koppelung der Lehraktivitäten mit den Lernzielen**.

Neben der Vermittlung der eigentlichen Inhalte zielt die VO darauf ab, den Studierenden klar darzustellen, wie **Konzepte aus verschiedensten (nahezu disjunkt erscheinenden) Teilgebieten der Mathematik** nicht nur gemeinsam das Studium fraktaler Strukturen ermöglichen, sondern zu einem eigenständigen Ganzen zusammenwachsen.

Den Studierenden wird **regelmäßig Rückmeldung** über ihren **Lernfortschritt** gegeben. Sie erhalten schon während des Semesters Feedback über die von ihnen erbrachten Leistungen und damit Orientierung für ihr weiteres Lernen.

Die Studierenden werden ab der ersten VO explizit dazu ermutigt, jederzeit **Zwischenfragen** zu stellen und die erarbeiteten **Inhalte kritisch zu hinterfragen**. Durch die maximal zehnminütige Wiederholung der in der Vorwoche behandelten Resultate und die Skizzierung der anstehenden Arbeitsschritte erhalten die Studierenden implizit **Rückmeldung über ihren und den gemeinsamen Lernfortschritt** – zu jedem Zeitpunkt der VO ist klar, auf welcher Zwischenetappe zum Ziel man sich gerade befindet. Die zahlreichen, von den Studierenden freiwillig erarbeiteten und präsentierten Lösungen der bzw. Lösungsideen für Übungsaufgaben erlauben ein direktes wechselseitiges **Feedback** – einerseits können mögliche elegantere Lösungswege (Abkürzungen) skizziert werden, andererseits erhält man als Vortragender einen bestmöglichen Überblick darüber, welche Konzepte gut und welche weniger gut verinnerlicht wurden.

In der Lehrveranstaltung kommt ein **fares und transparentes Beurteilungssystem** zur Anwendung. Die **Prüfungsinhalte und Beurteilungsformen** sind an den **Lernzielen** und **Lernformen** der Lehrveranstaltung orientiert. Die Beurteilung der Studierenden spiegelt nachvollziehbar die von ihnen erreichte Leistung wider.

Alle Formalitäten werden in der ersten VO besprochen. Als nicht prüfungsimmanente LVA wird der Besuch der VO zwar nicht in die Prüfungsnote miteinbezogen, die schon erwähnten, freiwilligen Übungsaufgaben erlauben es aber, „**Bonusfragen**“ (im zuvor geschilderten Sinne) für die anstehende mündliche Prüfung zu sammeln. Die Prüfung selbst ist so organisiert, dass 8-10 Fragen besprochen werden, wobei die Studierenden zum Zwecke mathematisch präziser Formulierungen schriftliche Notizen machen dürfen. Bedingt durch die überschaubare Anzahl an Mathematikstudierenden in Salzburg kann der gewünschte **Prüfungstermin eine Woche im Voraus per email vereinbart** werden – die Studierenden müssen sich also nicht nach drei vorgegebenen Terminen richten, sondern können sich so lange wie sie es für notwendig erachten, auf die Prüfung vorbereiten.

Weitere Anmerkungen:

In Anbetracht der Tatsache, dass in den letzten Jahren überwiegend prüfungsimmanente LVA prämiert wurden, freut es mich umso mehr, dass die Studierenden meine „klassische“ Vorlesung für den Preis für hervorragende Lehre nominiert haben. Unabhängig von der finalen Vergabe des Preises war es mir letztes Semester eine Freude, die VO „Fraktale und Zufall“ abzuhalten. Allein die Tatsachen, dass mehrere Studierende in der mündlichen Prüfung von „extrem schönen Resultaten“, „einfachen Beweisideen“ und „unerwarteten Zusammenhängen von Teilgebieten der Mathematik“ sprachen, und dass es das Chaos Game es im Zeitalter von Facebook immer noch schafft, Staunen bei Studierenden auszulösen, sind Gewinn genug.