UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Verena Bögelein
Besprechung: 20.12.2016

Maß- und Integrationstheorie

10. Übungsblatt

Theorieaufgaben

1. Erklären Sie die Flächenformel.

Rechen-/Beweisaufgaben

Aufgabe 32

a) Zeigen Sie, dass das 0-dimensionale Hausdorff Maß $\mathcal{H}^0$ in $\mathbb{R}^N$ gleich dem Zählmaß auf $\mathbb{R}^N$ ist.

b) Sei $c\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ eine injektive, differenzierbare Kurve. Zeigen Sie mit Hilfe der Flächenformel, dass für die Länge der Kurve gilt:

$$L(c) = \int_0^1 \|c'(t)\| \,\mathrm{d}t.$$

(Dabei ist $L(c) := \mathcal{H}^1(c([0,1]))$ die Länge der Kurve c.)

Aufgabe 33

Sei $h > 0$ und $f\colon (0,h) \to [0,\infty)$ eine einmal stetig differenzierbare Funktion. Wir betrachten die Menge $A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < h, x^2 + y^2 = f(z)^2\}$. Die Menge A ist eine Roationsfläche. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{H}^2(A) = 2\pi \int_{(0,h)} f(z)\sqrt{1 + |f'(z)|^2} \,\mathrm{d}\mathcal{L}^1(z)$$

gilt.

Aufgabe 34

In dieser Aufgabe werden wir mit maßtheoretischen Mitteln die Hausdorff-Dimension der Cantor-Menge C bestimmen. Zur Erinnerung, die Cantor-Menge ist wie folgt definiert: Sei $I_0 := [0,1]$ und $I_k := \frac{1}{3}I_{k-1} \cup \frac{1}{3}(I_{k-1}+2)$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $C := \bigcap_{k=0}^{\infty} I_k$.

a) Bestimmen Sie alle $L \in [0,\infty)$, sodass $\mathcal{H}^L(C) < \infty$. (Hinweis: Berechnen Sie $\mathcal{H}^L_{3^{-k}}(I_k)$ für $k \in \mathbb{N}$ und finden Sie eine von k unabhängige Schranke.)

b) Bestimmen Sie alle $L \in [0,\infty)$, sodass $\mathcal{H}^L(C) > 0$. (Hinweis: Mit Hilfe von Teilaufgabe a) können Sie eine Vermutung für die Hausdorff-Dimension von C aufstellen. Benutzen Sie diese Vermutung und die Stetigkeit des Maßes $\mathcal{H}^L_\delta$.)

c) Bestimmen Sie die Hausdorff-Dimension der Cantor-Menge.