

Maß- und Integrationstheorie

11. Übungsblatt

Rechen-/Beweisaufgaben

Aufgabe 35

In dieser Aufgabe werden wir auf zwei verschiedene Arten das $(n - 1)$ -dimensionale Hausdorff Maß der Sphäre $(S_1^{n-1}(0)) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ in \mathbb{R}^n berechnen.

- a) Berechnen Sie mit Hilfe der Transformationsformel und der stereographischen Parametrisierung $\mathcal{H}^{n-1}(S_1^{n-1}(0))$.
- b) Berechnen Sie $\mathcal{H}^{n-1}(S_1^{n-1}(0))$, indem Sie die obere Hälfte der Sphäre parametrisieren, wie z.B. durch die Abbildung $G: B_1^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $G(x) = (x, \sqrt{1 - |x|^2})$. (Hinweis: Nutzen Sie ohne Rechnung dabei aus, dass

$$\int_0^1 \frac{\rho^{n-2}}{\sqrt{1 - \rho^2}} d\rho = \sqrt{\pi} \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

gilt.)

Aufgabe 36

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

- a) $\int_{S_1^1(0)} x_1^2 d\mathcal{H}^1(x_1, x_2);$
- b) $\int_{S_1^1(0)} x_1 d\mathcal{H}^1(x_1, x_2);$
- c) $\int_M x_1 d\mathcal{H}^1(x_1, x_2),$ mit $M := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < 1, x_2 = x_1^2\}.$

Aufgabe 37

Wir betrachten die Funktion $g: \mathbb{R}^2 \supset A \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$g(x, y) = (\sinh(x + y), \cosh(x - y), x - y)$$

und $A = (0, 1) \times (-1, 2)$. Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_{g(A)} \frac{1}{x_2} d\mathcal{H}^2(x_1, x_2, x_3).$$

Aufgabe 38

Gegeben sei $A := \{x \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{2} \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 1, 0 \leq x_3 \leq 2\}$ und die Funktion $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{x_3}{1 + x_1^2 + x_2^2}.$$

Berechnen Sie das Integral $\int_A f(x) d\mathcal{L}^3(x)$.

