UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Verena Bögelein
Besprechung: 17.01.2017

Maß- und Integrationstheorie

12. Übungsblatt

Theorieaufgaben

1. Formulieren Sie den Satz von Gauß für Quader.
2. Erklären Sie, wann man ein Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$ C^k-glatt nennt ($k \in \mathbb{N}$).

Rechen-/Beweisaufgaben

Aufgabe 39

Gegeben seien der Quader Q in $\mathbb{R}^3$, der durch die gegenüberliegenden Ecken $(0,0,0)$ und $(5,3,2)$ festgelegt ist, und die Vektorfelder $F_1, F_2 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$F_1(x) = \begin{pmatrix} x_1(4+x_3) \\ x_2x_3 \\ x_1 - x_3^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F_2(x) = \begin{pmatrix} x_1x_2x_3 \\ x_2 - x_3 \\ 3x_1^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die beiden Integrale

$$\int_{\partial Q} F_i(x) \cdot \nu_Q \, \mathrm{d}\mathcal{H}^2(x)$$

für $i = 1, 2$.

Aufgabe 40

Sei $D = B_1^n(0)$ die offene Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass D ein C^1-Gebiet ist und berechnen Sie für alle $a \in \partial D$ den äußeren Einheitsnormalenvektor.

Aufgabe 41

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, $W \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und $g, h \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$.

a) Zeigen Sie, dass
$$\operatorname{div}(fW) = \nabla f \cdot W + f \operatorname{div} W$$
und
$$\Delta(gh) = (\Delta g)h + 2\nabla g \cdot \nabla h + g(\Delta h)$$
gilt.

b) Sei nun $Q = \Omega$ ein Quader und mindestens eine der Funktionen f und W, und mindestens eine der Funktionen g und h habe kompakten Träger. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\int_Q W \cdot \nabla f \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n = -\int_Q f \,\mathrm{div}\, W \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n$$

und

$$\int_Q h\Delta g \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int_Q g\Delta h \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n.$$