UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Verena Bögelein
Besprechung: 24.01.2017

Maß- und Integrationstheorie

13. Übungsblatt

Theorieaufgaben

1. Formulieren Sie den Satz von Gauß.

Rechen-/Beweisaufgaben

Aufgabe 42

Sei $D \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes C^1-Gebiet. Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_{\partial D} (\nu_D)_i \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1}$ für $i \in \{1, ..., N\}$,

b) $\displaystyle\int_{S^{N-1}(0)} x_k^2 \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1}$ für $k \in \{1, ..., N\}$;

c) $\displaystyle\int_{S^{N-1}(0)_+} x_N \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1}$ für $S^{N-1}(0)_+ = S^{N-1}(0) \cap \{x \in \mathbb{R}^N : x_N \geq 0\}$.

d) Zeigen Sie, dass für $f, g \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R})$ und $j \in \{1, ..., N\}$ gilt:

$$\int_D \frac{\partial f}{\partial x_j} g \,\mathrm{d}\mathcal{L}^N = -\int_D \frac{\partial g}{\partial x_j} f \,\mathrm{d}\mathcal{L}^N + \int_{\partial D} fg(e_j \cdot \nu_D) \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1}.$$

Aufgabe 43

Gegeben sei das Gebiet $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x^2 + y^2 < 4, 0 < z < 1\}$ und das Vektorfeld $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, das definiert ist durch $F(x, y, z) = (0, 0, (\pi + xy)\sin(1 - z^4))$.

a) Bestimmen Sie den Rand von D und den äußeren Einheitsnormalenvektor ν_D.

b) Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß das Integral $\int_D \operatorname{div} F \,\mathrm{d}\mathcal{L}^3$.

Aufgabe 44

Im Folgenden sei Ω eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^N$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Für $s, t \in \mathbb{R}$ mit $s < t$ gibt es eine C^∞-Funktion $\chi\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ mit $\chi \equiv 0$ auf $(-\infty, s]$ und $\chi \equiv 1$ auf $[t, \infty)$.

   (Hinweis: Bekannt ist die C^∞-Funktion f mit $f(x) = \exp(-1/x)$ für $x > 0$ und $f(x) = 0$ für $x \leq 0$; integieren Sie eine ähnliche Funktion mit Träger in $[s, t]$.)

b) Für alle $R > r > 0$ und $a \in \mathbb{R}^N$ gibt es eine C^∞-Funktion $\eta\colon \mathbb{R}^N \to [0,1]$ mit $\eta(x) = 1$ für $|x - a| \leq r$ und $\eta(x) = 0$ für $|x - a| \geq R$.

c) Für jedes Kompaktum K auf Ω gibt es eine Funktion $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $0 \leq \psi \leq 1$ auf Ω und $\psi \equiv 1$ auf K. Hierbei ist

$$C_0^\infty(\Omega) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \operatorname{spt} \varphi \text{ ist kompakte Teilmenge von } \Omega\}.$$

Zusatzaufgabe

Zeigen Sie: Zu jedem $\varepsilon > 0$ kann man auch eine Funktion mit den Eigenschaften aus Aufgabe 44 a) bzw. b) finden, die zusätzlich $0 \leq \chi' \leq \frac{1}{t-s} + \varepsilon$ auf $\mathbb{R}$ bzw. $|\nabla \eta| \leq \frac{1}{R-r} + \varepsilon$ auf $\mathbb{R}^N$ erfüllt.