UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Verena Bögelein
Besprechung: 25.10.2016

Maß- und Integrationstheorie

3. Übungsblatt

Theorieaufgaben

1. Formulieren Sie die beiden Korollare zur stetigen Abhängigkeit des Integrals vom Integrationsbereich.
2. Formulieren Sie den Satz zur Vollständigkeit der L^p-Räume.

Rechen-/Beweisaufgaben

Aufgabe 7

Wir betrachten die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n\colon (0,\infty)\to\mathbb{R}$ und

$$f_n(x) = \frac{\sin(x^n)}{x^n}\frac{1}{1+x^2}.$$

Überprüfen Sie, ob der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}\mathcal{L}(x)$$

existiert und berechnen Sie diesen gegebenenfalls.

Aufgabe 8

Im Folgenden sind wir daran interessiert

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}\mathcal{L}^1(x)$$

für verschiedene Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu berechnen. Überprüfen Sie, in welchen der folgenden Fälle Sie den Satz von der monotonen Konvergenz anwenden können.

a) $f_n\colon (0,\infty)\to\overline{\mathbb{R}}$, $x\mapsto n\chi_{[0,1/n]}(x)$;

b) $f_n\colon (0,\infty)\to\overline{\mathbb{R}}$, $x\mapsto \frac{1}{n}\chi_{[0,n]}(x)$;

c) $f_n\colon (0,\infty)\to\overline{\mathbb{R}}$, $x\mapsto n\chi_{[0,n]}(x)$.

Aufgabe 9

Wir betrachten die Funktionenfolge $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$), die definiert ist durch

$$f_n(x) = \chi_{[0,\sqrt{n})}(x) \left(1 - \tfrac{x^2}{n}\right)^n .$$

Zeigen Sie, dass f_n punktweise gegen eine Funktion f konvergiert und dass

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f_n(x) \,\mathrm{d}\mathcal{L}^1(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) \,\mathrm{d}\mathcal{L}^1(x)$$

gilt.

Aufgabe 10

Sei μ ein Maß auf $\mathbb{R}^N$, $A \subset \mathbb{R}^N$, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in I$ und $f \colon I \times A \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

- Für alle $t \in I$ gilt $f(t, \cdot) \in L^1(A, \mu)$;
- Die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x)$ existiert für alle $x \in A$;
- Es existiert eine Umgebung U von t_0 und eine μ-integrierbare Funktion $g \colon U \to [0, \infty)$, sodass für alle $t \in U$ und $x \in A$ gilt:

$$\left|\tfrac{\partial f}{\partial t}(t, x)\right| \leq g(x).$$

Zeigen Sie, dass die Funktion $F \colon I \to \mathbb{R}$,

$$F(t) := \int\limits_A f(x, t) \,\mathrm{d}\mu(x)$$

im Punkt t_0 differenzierbar ist und dass

$$F'(t_0) = \int\limits_A \tfrac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) \,\mathrm{d}\mu(x)$$

gilt.