UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Verena Bögelein
Besprechung: 08.11.2016

Maß- und Integrationstheorie

4. Übungsblatt

Hinweis: Da die Übung am 1.11. entfällt, beträgt die Bearbeitungszeit für dieses Blatt 2 Wochen. Die Aufgabenanzahl ist dementsprechend etwas erhöht. Wir raten Ihnen daher, rechtzeitig anzufangen und den kompletten Bearbeitungszeitraum auszunutzen.

Theorieaufgaben

1. Geben Sie eine präzise Definition des Begriffes des Produktmaßes an.
2. Geben Sie eine präzise Formulierung des Satzes von Fubini an.

Rechen-/Beweisaufgaben

Aufgabe 11

Sei μ ein Maß auf $\mathbb{R}^N$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine μ-messbare Menge mit $\mu(\Omega) < \infty$. Weiter sei $\psi\colon [0,\infty) \to [0,\infty]$ eine monoton wachsende Funktion mit

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\psi(t)}{t} = \infty.$$

Gegeben sei eine Funktionenfolge $f_n\colon \Omega \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ mit

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega \psi(|f_n|)\,\mathrm{d}\mu \le C < \infty.$$

Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar ist, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $\int_C |f_n|\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon$ für alle $C \subset \Omega$ mit $\mu(C) < \delta$ und $n \ge n_0$.

Aufgabe 12

Sei μ ein Maß auf $\mathbb{R}^N$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine μ-messbare Menge mit $\mu(\Omega) < \infty$. Gegeben sei nun eine Funktionenfolge $f_n\colon \Omega \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ und eine Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ mit

- $f_n \to f$ punktweise μ-fast überall auf Ω
- f_n ist gleichmäßig beschränkt in $L^p(\Omega)$, d.h. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega |f_n|^p\,\mathrm{d}\mu \le C < \infty$ für ein $p > 1$.

a) Zeigen Sie, dass für $a, b \geq 0$ und $p > 1$ gilt: $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$.

b) Zeigen Sie, dass $f_n \to f$ in $L^r(\Omega)$ konvergiert für alle $1 \leq r < p$, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f|^r \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

(Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 11 mit $\psi(t) = t^{\frac{p}{r}}$ und den Satz von Vitali.)

Aufgabe 13

Wir definieren die Funktion $F\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ durch

$$F(t) := \int_0^1 \frac{x^t - 1}{\ln x} \, \mathrm{d}\mathcal{L}^1(x).$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion F wohldefiniert ist, d.h. $|F(t)| < \infty$ für alle $t \geq 0$. Zeigen Sie, dass F für alle $t > 0$ differenzierbar ist und berechnen Sie $F'(t)$.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe von a) die Funktion F.

Aufgabe 14

Sei μ ein Maß auf $\mathbb{R}^N$, $A \subset \mathbb{R}^N$ und F ein endlichdimensionaler normierter Raum über $\mathbb{K}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Jede in $L^p(A, \mu, F)$ konvergente Folge besitzt eine μ-fast überall auf A konvergente Teilfolge. Geben Sie zusätzlich ein Beispiel an, bei dem nicht die gesamte Folge μ-fast überall konvergiert.

b) Jede in $L^p(A, \mu, F)$ konvergente Folge konvergiert auch im Maß μ auf A.

(Hinweis: Gehen Sie vor wie im Beweis von Satz 1.7.)

Aufgabe 15

Sei μ ein Maß auf $\mathbb{R}^N$ und ν ein Maß auf $\mathbb{R}^M$. Zeigen Sie, dass $\mu \times \nu$ ein Maß auf $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ ist.

Aufgabe 16

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} y^{-2} & \text{falls } 0 < x < y < 1, \\ -x^{-2} & \text{falls } 0 < y < x < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie die beiden iterierten Riemann-Integrale

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \quad \text{und} \quad \int_0^1 \int_0^1 f(x,y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.$$