UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Verena Bögelein
Besprechung: 29.11.2016

Maß- und Integrationstheorie

7. Übungsblatt

Theorieaufgaben

1. Erklären Sie die Transformationsformel für Lebesgue-Integrale.

Rechen-/Beweisaufgaben

Aufgabe 23

Es seien $a, b > 0$ und $M := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1\right\}$.

a) Skizzieren Sie die Menge M für $a = 1$ und $b = 2$.

b) Bestimmen Sie die Menge $M_y = \{x \in \mathbb{R} : (x,y) \in M\}$ für $y \in \mathbb{R}$.

c) Berechnen Sie das zwei-dimensionale Lebesgue-Maß $\mathcal{L}^2(M)$ von M.

Aufgabe 24

Berechnen Sie das Integral

$$\int_A x_1 \ln(|x|^2) \, \mathrm{d}\mathcal{L}^2(x)$$

für die Menge

$$A = \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x|^2 < e^{\frac{2}{3}}, x_1 > 0\right\}$$

mit Hilfe der Transformation $F(\zeta, \eta) := (e^\zeta \cos \eta, e^\zeta \sin \eta)$.

Aufgabe 25

Sei A eine $m \times n$-Matrix mit Werten in $\mathbb{R}$. Dann können wir die Abbildung $x \mapsto Ax$ als Abbildung von $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ nach $(\mathbb{R}^m, |||\cdot|||)$ auffassen, wobei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ und $|||\cdot|||$ eine Norm auf $\mathbb{R}^m$ ist. Die Operatornorm von A ist dann definiert durch

$$\|A\| := \max_{x \neq 0} \frac{|||Ax|||}{\|x\|} = \max_{\|x\| \leq 1} |||Ax||| = \max_{\|x\|=1} |||Ax|||$$

(vgl. Analysis II; die beiden letzten Identitäten müssen nicht extra bewiesen werden). Im Folgenden werden wir nun die Operatornorm von A für verschiedene Normen berechnen, d.h. zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) $\|A\|_\infty := \max_{\|x\|_\infty \le 1} \|Ax\|_\infty = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$;

b) $\|A\|_1 := \max_{\|x\|_1 \le 1} \|Ax\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$;

c) $\|A\|_2 := \max_{\|x\|_2 \le 1} \|Ax\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$, wobei A^T die zu A transponierte Matrix und $\lambda_{\max}(A^T A)$ der größte Eigenwert der Matrix $A^T A$ ist.

Bemerkung: Für $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ ist $\|x\|_\infty = \max_{j=1,\dots,n} |x_j|$, $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|$ und $\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Außerdem unterscheiden wir in der Notation der Normen nicht ob diese auf $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{R}^m$ definiert sind; welche Norm jeweils gemeint ist, sollte aus dem Kontext klar sein.