UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Verena Bögelein
Besprechung: 06.12.2016

Maß- und Integrationstheorie

8. Übungsblatt

Theorieaufgaben

1. Erklären Sie wie man den $\mathbb{R}^2$ mit Polarkoordinaten und den $\mathbb{R}^3$ mit Kugelkoordinaten parametrisieren kann.

Rechen-/Beweisaufgaben

Aufgabe 26

Entscheiden Sie für welche $s \in \mathbb{R}$ das Integral

$$\int_{B_1^n(0)} |x|^s \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n(x)$$

endlich ist und berechnen Sie gegebenenfalls den Wert.

Aufgabe 27

a) Berechnen Sie unter Verwendung von Polarkoordinaten das Integral

$$\int_A e^{-(x^2+y^2)} \frac{xy}{x^2+y^2} \, \mathrm{d}\mathcal{L}^2(x,y)$$

mit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x, y \geq 0\}$

b) Berechnen Sie unter Verwendung von Zylinderkoordinaten, d.h. benutzen Sie die Transformation

$$F(r, \varphi, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z),$$

das 3-dimensionale Lebesgue-Maß der Menge

$$M := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x_3 \leq 2, 1 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 4, 0 \leq x_2 \leq \sqrt{3} x_1 \right\}.$$

Aufgabe 28

Für eine vektorwertige Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ mit $d \geq 2$, d.h.

$$f(x) = (f_1(x), ..., f_d(x)) = \sum_{i=1}^{d} f_i(x) e_i$$

für Funktionen $f_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und Basisvektoren e_i des $\mathbb{R}^d$ für $i = 1, ..., d$, definiert man das Lebesgue-Integral $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}\mathcal{L}^n(x)$ durch die komponentenweiße Lebesgue-Integrale $\int_{\mathbb{R}^n} f_i(x)\,\mathrm{d}\mathcal{L}^n(x)$ (sofern alle diese Integrale existieren), d.h.

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}\mathcal{L}^n(x) = \sum_{i=1}^{d} \int_{\mathbb{R}^n} f_i(x)\,\mathrm{d}\mathcal{L}^n(x) \cdot e_i.$$

Der Schwerpunkt $x_S \in \mathbb{R}^n$ einer Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ wird definiert als das Mittelwertintegral der Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $x \mapsto x$, d.h.

$$x_S := \fint_A x\,\mathrm{d}\mathcal{L}^n(x) := \frac{1}{\mathcal{L}^n(A)} \left(\int_A x_1\,\mathrm{d}\mathcal{L}^n(x), ..., \int_A x_n\,\mathrm{d}\mathcal{L}^n(x) \right).$$

Berechnen Sie den Schwerpunkt des Würfels $[0,1]^3$, des 3-dimensionalen Simplex $A = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 \leq 1\}$, der Einheitskugel $B_1^3(0)$ und der oberen Einheitskugel $B_1^3(0) \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 \geq 0\}$.