UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Verena Bögelein
Besprechung: 13.12.2016

Maß- und Integrationstheorie

9. Übungsblatt

Theorieaufgaben

1. Geben Sie eine präzise Formulierung des (sphärischen) Hausdorff-Maßes an.

Rechen-/Beweisaufgaben

Aufgabe 29

Berechnen Sie die folgenden Intergale:

a)
$$\int_A x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 \,\mathrm{d}\mathcal{L}^2(x)$$
für $A := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x_1^2 + x_2^2 \le 9, x_1 \le 0, x_2 \ge 0\}$.

b)
$$\int_B |x|^{-\frac{1}{3}} x_3 \,\mathrm{d}\mathcal{L}^3(x)$$
für $B := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : |x| < r, x_3 \ge 0\}$ und $r > 0$.

Aufgabe 30

Zeigen Sie, dass die $(n-1)$-dimensionalen Sphären
$$S_r^{n-1}(x_0) := \Big\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\Big\}$$
$\mathcal{L}^n$-Nullmengen sind, wobei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ ist.

Aufgabe 31

Das L-dimensionale Hausdorff-Maß $\mathcal{H}^L$ in $\mathbb{R}^N$ ist für $0 \le L < \infty$ und $A \subset \mathbb{R}^N$ wie folgt definiert:
$$\mathcal{H}^L(A) := \lim_{\delta \downarrow 0} \left[\inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(L) \left(\frac{\operatorname{diam} C_i}{2} \right)^L : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i, \operatorname{diam} C_i \le \delta \right\} \right]$$
Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}^L$ ein Maß auf $\mathbb{R}^N$ ist.