Fachbereich Mathematik **Partielle Differentialgleichungen**
Universität Salzburg **Wintersemester 2016/17**
Prof. Dr. Verena Bögelein **Besprechung: 10.11.2016**

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (Poisson-Integralformel im $\mathbb{R}^2$ - Teil 1).

Zeigen Sie: Ist u harmonisch auf einer Umgebung der abgeschlossenen Kreisscheibe $B_R := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ vom Radius R um 0 in $\mathbb{R}^2$, so gilt die Mittelwertformel

$$u(0) = \frac{1}{2\pi R}\int_{|z|=R} u(z)\, d\mathcal{H}^1(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{it})\, dt.$$

Zeigen Sie zunächst, dass Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion harmonische Funktionen sind. (Tipp: Nutzen Sie dazu die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.)

Beweisen Sie dann die obige Mittelwertformel mit der Cauchyschen Integralformel (bekannt aus der Funktionentheorie), indem Sie $z = x + iy$ setzen und u als Realteil einer holomorphen Funktion auffassen.

Aufgabe 2 (Poisson-Integralformel im $\mathbb{R}^2$ - Teil 2).

Zeigen Sie, dass die gebrochen lineare Transformation

$$g(w) = R\frac{Rw + a}{R + \bar{a}w}$$

für $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| < R$ den Einheitskreis B_1 bijektiv auf die Kreisscheibe B_R abbildet, wobei der Nullpunkt in den Punkt a übergeht. Berechnen Sie anschließend die Umkehrabbildung $g^{-1} : B_R \to B_1$.

Aufgabe 3 (Poisson-Integralformel im $\mathbb{R}^2$ - Teil 3).

Benutzen Sie Aufgabe 1 und Aufgabe 2, um die Poissonsche Integralformel

$$u(a) = \frac{1}{2\pi R}\int_{|z|=R} \frac{R^2 - |a|^2}{|z-a|^2} u(z)\, d\mathcal{H}^1(z)$$

für $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| < R$ herzuleiten.

Hinweis: Begründen Sie zunächst, warum $\tilde{u} := u \circ g$ mit der gebrochen linearen Funktion g aus Aufgabe 2 eine harmonische Funktion auf einer Umgebung der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe B_1 ist. Wenden Sie anschließend die Mittelwertformel aus Aufgabe 1 auf die harmonische Funktion $\tilde{u}$ an und formen Sie das entsprechende Integral durch eine geeignete Transformation um. (Tipp: Berechnen Sie den Betrag der Ableitung von g^{-1} aus Aufgabe 2 auf der Kreislinie $\{|z| = R\}$.)

Aufgabe 4 (Kelvin-Transformierte).

Sei $\rho > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$ definieren wir

$$x^* := x_0 + \frac{\rho^2}{|x - x_0|^2}(x - x_0).$$

Die Abbildung $x \mapsto x^*$ heißt Inversion bezüglich der Sphäre $\partial B_\rho(x_0)$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$ offen und $\Omega^* := \{x* : x \in \Omega\}$. Wir definieren die Kelvin-Transformierte $u^* : \Omega \to \mathbb{R}$ von $u : \Omega^* \to \mathbb{R}$ durch

$$u^*(x) := \frac{\rho^{n-2}}{|x - x_0|^{n-2}} u(x^*).$$

Die Abbildung $* : u \mapsto u^*$ heißt Kelvin-Transformation. Zeigen Sie: Ist u harmonisch auf Ω^*, so ist u^* harmonisch auf Ω.