Fachbereich Mathematik **Partielle Differentialgleichungen**
Universität Salzburg **Wintersemester 2016/17**
Prof. Dr. Verena Bögelein **Besprechung: 17.11.2016**

Übungsblatt 5

Hinweis: Die Aufgaben dieses Blattes bauen zwar aufeinander auf, Sie können jedoch trotzdem weitermachen, auch wenn Sie eine Aufgabe nicht lösen können. Nehmen Sie in einem solchen Fall alle vorhergehenden Schritte als bewiesen an.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, zusammenhängendes Gebiet und $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

Aufgabe 1 (Maximumprinzipien für den Laplace-Operator - Teil 1).

Ist $\Delta u > 0$ in Ω, so nimmt u im Inneren kein Maximum an. Ist $\Delta u < 0$ in Ω, so nimmt u im Inneren kein Minimum an.

Hinweis: Benutzen Sie die Hesse-Matrix und etwas Lineare Algebra.

Aufgabe 2 (Maximumprinzipien für den Laplace-Operator - Teil 2).

Ist $\Delta u \geq 0$ in Ω, so gilt $\sup_\Omega u \leq \sup_{\partial\Omega} u$, das heißt u nimmt sein Maximum auch auf dem Rand von Ω an.

Hinweis: Sei $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = \sup_\Omega u$. Betrachten Sie dann Δu_ε für $u_\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon|x - x_0|^2$ und lassen Sie ε gegen 0 streben.

Aufgabe 3 (Maximumprinzipien für den Laplace-Operator - Teil 3).

Gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\Delta u + \lambda u = 0$ in Ω und ist $u|_{\partial\Omega} \equiv 0$, $u \not\equiv 0$ in Ω, so ist $\lambda > 0$.

Hinweis: Benutzen Sie die erste Greensche Formel.

Aufgabe 4 (Maximumprinzipien für den Laplace-Operator - Teil 4).

Ist $\Delta u \geq 0$ in Ω, so ist u entweder konstant oder u nimmt im Inneren kein Maximum an.

Gehen Sie dabei wie folgt vor und verdeutlichen Sie sich die Beweisschritte anhand von Skizzen:

Schritt 1: Nehmen Sie an, es gäbe ein $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = M := \sup_\Omega u$ und ein $\tilde{x}_0 \in \Omega$ mit $u(\tilde{x}_0) < M$. Zeigen Sie zunächst: Es gibt ein $\tilde{x} \in \Omega$ und einen Radius $\rho > 0$, sodass $K := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - \tilde{x}| \leq \rho\} \subset \Omega$ und $u(x) < M$ für $|x - \tilde{x}| < \rho$ gelten, aber ein $x^* \in \partial K$ existiert mit $u(x^*) = M$.

Schritt 2: Zeigen Sie: Es gibt $x_1 \in \Omega$ und $\rho_1 > 0$, sodass $K_1 := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_1| \leq \rho_1\} \subset \Omega$, $x^* \in \partial K_1$ und $u(x) < M$ für $x \in K_1 \setminus \{x^*\}$ gelten.

Schritt 3: Betrachten Sie anschließend für $\rho_2 < \frac{1}{2}\min\{\rho_1, \operatorname{dist}(x^*, \partial\Omega)\}$ die Kugel $K_2 := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x^*| \leq \rho_2\}$ und zeigen Sie, dass es ein $\alpha > 0$ gibt, sodass für $v(x) := \exp(-\alpha|x - x_1|^2) - \exp(-\alpha\rho_1^2)$ gilt: $\Delta v > 0$ in K_2.

Schritt 4: Zeigen Sie, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass für $w(x) := u(x) + \varepsilon v(x)$ gilt: $w < M$ auf ∂K_2.

Schritt 5: Folgern Sie mit Aufgabe 2 die Behauptung von Aufgabe 4.