Fachbereich Mathematik
Universität Salzburg
Prof. Dr. Verena Bögelein

Partielle Differentialgleichungen
Wintersemester 2016/17
Besprechung: 24.11.2016

Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (Poisson-Formel für den Halbraum - Teil 1).

Sei $n \geq 2$ und $\mathbb{R}^n_+ := \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$ der obere Halbraum im $\mathbb{R}^n$. Bestimmen Sie die Greensche Funktion für $\mathbb{R}^n_+$.

Hinweis: Modifizieren Sie die explizite Konstruktion der Greenschen Funktion auf Kugeln $B_r(a) \subset \mathbb{R}^n$ aus der Vorlesung auf die Halbraum-Situation.

Aufgabe 2 (Poisson-Formel für den Halbraum - Teil 2).

Sei $\varphi \in C^0(\mathbb{R}^{n-1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$. Zeigen Sie, dass durch

$$u(x) = \frac{2x_n}{\omega_n} \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^n} \, d\mathcal{H}^{n-1}(y),$$

mit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+$, eine auf $\mathbb{R}^n_+$ beschränkte, harmonische Funktion definiert wird.

Hinweis: Rechtfertigen Sie zunächst, warum Sie unter dem Integral differenzieren dürfen und führen Sie anschließend diese Differentiation durch.

Aufgabe 3 (Poisson-Formel für den Halbraum - Teil 3).

Zeigen Sie, dass die in Aufgabe 2 definierte, harmonische Funktion u die Randwerte der stetigen Funktion φ tatsächlich annimmt, d.h. für alle $x_0 \in \partial\mathbb{R}^n_+$ gilt:

$$\lim_{\mathbb{R}^n_+ \ni x \to x_0} u(x) = \varphi(x_0).$$

Hinweis: Modifizieren Sie den Beweis der Poisson-Formel für die Kugel in geeigneter Weise auf die hier gegebene Situation.

Aufgabe 4 (Poisson-Formel für den Halbraum - Teil 4).

Sei wiederum $\varphi \in C^0(\mathbb{R}^{n-1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ mit $\varphi(x) = |x|$ für $|x| \leq 1$. Sei weiter $u\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ die durch die Poisson-Formel für den Halbraum in Aufgabe 2 gegebene Funktion. Zeigen Sie, dass $Du(x)$ nahe $x = 0$ unbeschränkt wird.

Hinweis: Betrachten Sie für $h > 0$ den Differenzenquotienten $\frac{u(he_n)-u(0)}{h}$ und zeigen Sie, dass dieser beim Grenzübergang $h \downarrow 0$ unbeschränkt wird.