Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (**Minimum zweier subharmonischer Funktionen**).
Seien v_1 und $v_2 \colon \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}$ zwei subharmonische Funktionen. Aus der Vorlesung ist bereits bekannt, dass dann auch $\max\{v_1, v_2\}$ subharmonisch ist. Andererseits ist $\min\{v_1, v_2\}$ nicht notwendigerweise subharmonisch. Überlegen Sie sich dazu ein Gegenbeispiel. Ist $\min\{v_1, v_2\}$ subharmonisch, wenn v_1 und v_2 harmonisch sind ?

Vorschlag: Es genügt ein Beispiel für $n = 1$ zu finden, denn zu $h \colon I \to \mathbb{R}$, $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ betrachte die Funktion $u(x_1, \dots, x_n) = h(x_1)$. Dann ist u (sub)harmonisch auf $I \times \mathbb{R}^{n-1}$ genau dann, wenn h (sub)harmonisch ist auf I.

Aufgabe 2 (**Regulärer Randpunkt**).
Zeigen Sie, dass $x_0 = 0$ kein regulärer Randpunkt des Gebiets $B_1(0) \setminus \{0\}$ ist.

Hinweis: Nehmen Sie an, es gäbe eine Barriere b zu $B_1(0)$ im Punkt $x_0 = 0$. Betrachten Sie dann die Funktion

$$\tilde{b}(x) \coloneqq b(x) - M + \mu \left(\frac{1}{|x|^{n-2}} - 1 \right)$$

mit $\mu > 0$ beliebig und $M \coloneqq \min_{\partial B_1(0)} b > 0$. Überlegen Sie sich, dass $\tilde{b} \geq 0$ auf $\partial B_1(0)$ gelten muss und dass es ein $\delta > 0$ gibt, sodass $\tilde{b} \geq 0$ auf $\partial B_\rho(0)$ für alle $\rho \in (0, \delta)$. Wenden Sie nun das Maximumprinzip (bzw. hier das Minimumprinzip, das für superharmonische Funktionen gilt) an auf $\tilde{b}$ und $B_1(0) \setminus \overline{B_\rho(0)}$, um zu folgern, dass $\tilde{b} \geq 0$ auf $B_1(0) \setminus \overline{B_\rho(0)}$ gilt. Lassen Sie nun erst $\rho \downarrow 0$ und anschließend $\mu \downarrow 0$ gehen, um einen Widerspruch zu $b(0) = 0$ herzuleiten.

Aufgabe 3 (**Fourier-Transformation - Teil 1**).
Die Fourier-Transformierte $\hat{f} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ einer $\mathbb{C}$-wertigen L^1-Funktion f auf dem $\mathbb{R}^n$ ist definiert durch:

$$\hat{f}(\xi) \coloneqq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\, d\mathcal{L}^n(x).$$

Seien $f, g, h \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ L^1-Funktionen, η, $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass

(a) $\hat{f}$ stetig ist mit $\sup |\hat{f}| \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|f\|_{L^1}$.

(b) (i) $g(x) \coloneqq e^{ix\cdot\eta} f(x)$ die Fourier-Transformierte $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi - \eta)$ hat,
(ii) $g(x) \coloneqq f(x - y)$ die Fourier-Transformierte $\hat{g}(\xi) = e^{-iy\cdot\xi} \hat{f}(\xi)$ hat.

(c) (i) die Fourier-Transformierte von $h(x) \coloneqq f(rx)$ die Funktion $\hat{h}(\xi) = |r|^{-n} \hat{f}(\frac{1}{r}\xi)$ ist,
(ii) die Fourier-Transformierte von $h(x) \coloneqq \overline{f(x)}$ die Funktion $\hat{h}(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)}$ ist.

Aufgabe 4 (**Fourier-Transformation - Teil 2**).
Zeigen Sie folgende Aussagen zur Fourier-Transformation:

(a) (i) Ist $g(x) \coloneqq -ix_k f(x)$ eine L^1-Funktion, so ist $\hat{g}(\xi) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_k}(\xi)$.

(ii) Ist $g(x) := \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ eine stetige L^1-Funktion, so ist $\hat{g}(\xi) = i\xi_k \hat{f}(\xi)$.

(b) Die Faltung $f * g$ zweier L^1-Funktionen f und g sei hier definiert als:

$$(f * g)(x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathcal{L}^n(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,d\mathcal{L}^n(y).$$

Zeigen Sie mit dem Satz von Fubini folgende Aussagen:

(i) Mit f und g ist auch $f*g$ eine L^1-Funktion auf $\mathbb{R}^n$ mit $\|f*g\|_{L^1} \leq (2\pi)^{-n/2}\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}$, sowie $\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$.

(ii) Sind f und g L^2-Funktionen, so ist $f * g$ stetig und $|(f*g)(x)| \leq (2\pi)^{-n/2}\|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}$.

(c) Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Fubini und der Gleichung

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-s^2/2} e^{-ist}\,ds = \sqrt{2\pi} e^{-t^2/2},$$

dass für $g_0(x) := e^{-|x|^2/2}$ gilt:

$$\hat{g}_0 = g_0 \quad \text{und} \quad \hat{g}_0(0) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g_0(x)\,d\mathcal{L}^n(x) = 1.$$