Fachbereich Mathematik
Universität Salzburg
Prof. Dr. Verena Bögelein

Partielle Differentialgleichungen
Wintersemester 2016/17
Besprechung: 15.12.2016

Übungsblatt 8

Da die Übung am kommenden Donnerstag, den 08.12.2016 feiertagsbedingt ausfällt, haben Sie für die Bearbeitung dieses Übungsblatts insgesamt zwei Wochen Zeit. Wir empfehlen Ihnen, mit Teil 1 des Blattes zu beginnen, zu versuchen diesen bis 08.12.2016 abzuschließen und anschließend mit Teil 2 fortzufahren.

Teil 1: Äußere Kegelbedingung

Ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ erfüllt eine *äußere Kegelbedingung* im Punkt $x_0 \in \partial\Omega$, falls es einen *Kegel*

$$K(x_0, R, \alpha, e) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon 0 < |x - x_0| < R, \left| \frac{x - x_0}{|x - x_0|} - e \right| > \alpha \right\}$$

mit $R > 0$, $0 < \alpha < \sqrt{2}$ und $e \in \mathbb{R}^n$ mit $|e| = 1$ gibt, sodass $\Omega \subset K(x_0, R, \alpha, e)$.

In diesem Teil soll gezeigt werden, dass ein Randpunkt $x_0 \in \partial\Omega$ *regulär* ist - es also eine Barriere zu Ω in x_0 gibt - falls Ω in x_0 eine äußere Kegelbedingung erfüllt.

Aufgabe 1 (**Äußere Kegelbedingung - Teil 1**).
Skizzieren Sie Ω und $K(x_0, R, \alpha, e)$ in einem Punkt x_0, der die äußere Kegelbedingung erfüllt. Wieso haben wir $\alpha < \sqrt{2}$ vorausgesetzt ?

Nehmen Sie im Folgenden ohne Einschränkung $x_0 = 0$ an. Setzen Sie nun $\Omega^* := K(0, R, \alpha, e)$ und begründen Sie: Alle Punkte $x \in \partial\Omega^* \backslash \{0\}$ sind regulär.

Aufgabe 2 (**Äußere Kegelbedingung - Teil 2**).
Sei u^+ die harmonische Funktion auf Ω^*, die man mit der Perron'schen Methode als Infimum aller Superlösungen auf Ω^* zu den Randwerten $g(x) = |x|$ auf $\partial\Omega^*$ erhält, d.h.

$$u^+(x) := \inf_{w \in \mathcal{H}_g^+(\Omega^*)} w(x) \quad \text{für} \quad x \in \bar{\Omega}^*.$$

Unser Ziel ist es nun zu zeigen, dass u^+ eine Barriere für Ω in 0 ist. Überlegen Sie sich zunächst, dass u^+ harmonisch in Ω ist und stetig auf $\bar{\Omega} \backslash \{0\}$; benutzen Sie dazu, dass alle Punkte $x \in \partial\Omega^* \backslash \{0\}$ regulär sind. Was muss also noch gezeigt werden ?

Bestimmen Sie nun $u^+(x)$ für $x \in \partial\Omega^* \backslash \{0\}$ und zeigen Sie, dass $0 \leqslant u^+(x) \leqslant R$ für $x \in \bar{\Omega}^* \backslash \{0\}$ und damit insbesondere

$$0 \leqslant \liminf_{\Omega^* \ni x \to 0} u^+(x) \leqslant \limsup_{\Omega^* \ni x \to 0} u^+(x) := l \leqslant R.$$

Hinweis: Beachten Sie, dass $v \equiv 0$ bzw. $w \equiv R$ Sub- bzw. Superlösungen auf Ω^* sind.

Aufgabe 3 (**Äußere Kegelbedingung - Teil 3**).
Zu $\lambda > 1$ sei $\Omega^*_\lambda := \{\frac{x}{\lambda} \colon x \in \Omega^*\}$. Machen Sie eine Skizze dazu. Begründen Sie, dass $\varphi(x) = u^+(\lambda x)$ eine harmonische Funktion auf Ω^*_λ ist, stetig auf $\bar{\Omega}^*_\lambda \backslash \{0\}$ mit $\varphi(x) = R$ für $x \in \partial\Omega^*_\lambda \cap \{x \colon |x| = \frac{R}{\lambda}\}$ und $\varphi(x) = \lambda|x|$ für $x \in \partial\Omega^*_\lambda \cap \{x \colon 0 < |x| < \frac{R}{\lambda}\}$.

Zeigen Sie anschließend, dass ein $0 < \vartheta < 1$ existiert mit

$$u^+(x) \leqslant \vartheta\varphi(x) \quad \text{für alle} \quad x \in \partial\Omega_\lambda^* \setminus \{0\}.$$

Hinweis: Auf $\partial\Omega_\lambda^* \cap \{0 < |x| < \frac{R}{\lambda}\}$ kennen Sie u^+ explizit. Benutzen Sie Aufgabe 2 und das starke Maximumprinzip, um u^+ auf $\partial\Omega_\lambda^* \cap \{|x| = \frac{R}{\lambda}\} \subset \Omega^*$ geeignet abzuschätzen. Dann können Sie

$$\vartheta \in \left(\max\{\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{R} \sup_{\partial\Omega_\lambda^* \cap \{x:\ |x| = \frac{R}{\lambda}\}} u^+\}, 1 \right)$$

wählen und erhalten damit die Behauptung.

Aufgabe 4 (Äußere Kegelbedingung - Teil 4).

Zeigen Sie, dass $u^+ - \vartheta\varphi$ eine nichtpositive harmonische Funktion auf Ω_λ^* ist.

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 2 und Aufgabe 3, um zu zeigen, dass für $\delta > 0$ gilt: $v_\delta(x) := u^+(x) - \vartheta\varphi(x) - \frac{\delta}{|x|^{n-2}} < 0$ für $x \in \partial(\Omega_\lambda^* \setminus B_r)$ mit hinreichend kleinem Radius r. Wenden Sie nun das Maximumprinzip an, um zu folgern, dass $v_\delta < 0$ in $\Omega_\lambda^* \setminus B_r$ ist. Lassen Sie anschließend $r \downarrow 0$ und dann $\delta \downarrow 0$ gehen.

Aufgabe 5 (Äußere Kegelbedingung - Teil 5).

Folgern Sie mit Aufgabe 4 und der Konstanten l aus Aufgabe 2, dass

$$l = \limsup_{\Omega^* \ni x \to 0} u^+(x) \leqslant \vartheta \limsup_{\Omega_\lambda^* \ni x \to 0} \varphi(x) = \vartheta l$$

gilt. Was heißt das für l? Zeigen Sie anschließend mithilfe von Aufgabe 2, dass

$$\lim_{\Omega^* \ni x \to 0} u^+(x) = 0$$

existiert und u^+ eine Barriere für Ω in x_0 ist.

Teil 2: Anwendung der Fourier-Transformation

Wir definieren für eine $\mathbb{C}$-wertige L^1-Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ die *inverse Fourier-Transformation* durch:

$$\check{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} f(x)\, d\mathcal{L}^n(x).$$

Der *Fourier'sche Umkehrsatz* besagt dann, dass $\check{\hat{f}}(x) = f(x)$ ist, wenn f und $\hat{f}$ L^1-Funktionen sind und zudem f in x stetig ist.

Aufgabe 6 (Wärmeleitungsgleichung mit Fourier-Transformation).

Berechnen Sie mithilfe der Fourier-Transformation eine formale Lösung des folgenden Anfangswertproblems für die Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= 0 \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u &= g \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{aligned}$$

Anleitung: Formen Sie dazu zunächst die partielle Differentialgleichung - ohne sich um die Voraussetzungen zu kümmern - unter Benutzung der Eigenschaften der Fourier-Transformation von Übungsblatt 7 in eine gewöhnliche Differentialgleichung für die Fourier-Transformierte $\hat{u}$ um.

Bestimmen Sie die Lösung $\hat{u}$ der gewöhnlichen Differentialgleichung und nutzen Sie die Aussage des Fourier'schen Umkehrsatzes, die inverse Fourier-Transformation sowie die Eigenschaft, dass $\widecheck{fg} = \check{f} * \check{g}$ ist, um schließlich einen Integralausdruck für die Lösung u zu erhalten.

Vergessen Sie nicht, die Anfangsbedingung zu verwenden.

Hinweis: Sie dürfen hierbei benutzen, dass $\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}$ ist und außerdem, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi - t|x|^2}\, dx = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{n/2} e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}}.$$

Aufgabe 7 (**Schrödingergleichung mit Fourier-Transformation**).

Berechnen Sie unter Benutzung der Fourier-Transformation eine formale Lösung des folgenden Anfangswertproblems für die Schrödingergleichung:

$$\begin{aligned} i\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u &= 0 \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u &= g \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{aligned}$$

Hinweis: Führen Sie die Lösung u der Schrödingergleichung durch eine geeignete Skalierung der Zeit t auf eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung zurück und benutzen Sie die Ergebnisse aus Aufgabe 6.

Aufgabe 8 (**Wellengleichung mit Fourier-Transformation**).

Berechnen Sie mittles Fourier-Transformation eine formale Lösung des folgenden Anfangswertproblems für die Wellengleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u &= 0 \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u &= g \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^n \times \{0\}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= 0 \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{aligned}$$

Hinweis: Verfahren Sie analog zu Aufgabe 6. Den Integralausdruck am Ende der Rechnung müssen sie nicht mehr weiter vereinfachen.