Fachbereich Mathematik **Partielle Differentialgleichungen**
Universität Salzburg **Wintersemester 2016/17**
Prof. Dr. Verena Bögelein **Besprechung: 22.12.2016**

Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (Eindeutigekit von Lösungen der Poisson-Gleichung).
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $\varphi \in C^0(\Omega)$ und $f \in L^\infty(\Omega)$. Zeigen Sie, dass die Lösung des Dirichlet-Problems zur Poisson-Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= \varphi \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

(sofern sie existiert) eindeutig ist.

Aufgabe 2 (Mittelwerteigenschaft für Lösungen der Poisson-Gleichung).
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $n \geq 3$ und $f \in L^\infty(\Omega)$. Weiter erfülle $u \in C^2(\Omega)$ die Poisson-Gleichung

$$\Delta u = f \quad \text{in } \Omega.$$

Zeigen Sie, dass dann für jede Kugel $B_\rho(x_0) \subset\subset \Omega$ gilt:

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{\partial B_\rho(x_0)} u \, d\mathcal{H}^{n-1} + \frac{1}{\sigma_n} \int_{B_\rho(x_0)} \left(\frac{1}{\rho^{n-2}} - \frac{1}{|x - x_0|^{n-2}} \right) f \, dx,$$

wobei $\sigma_n := (n-2)\omega_n$.
Hinweis: Modifizieren Sie den Beweis der Mittelwerteigenschaft für harmonische Funktionen.

Aufgabe 3 (Schwache Ableitungen - Teil 1).

(a) Sei $\Omega = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$. Gegeben sind die folgenden zwei Funktionen:

$$u(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in (-1, 0) \\ 1 & \text{für } x \in [0, 1) \end{cases} \quad \text{und} \quad w(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in (-1, 0) \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x \in (0, 1) \end{cases}$$

Sind diese Funktionen schwach differenzierbar ? Bestimmen Sie gegebenenfalls ihre schwache Ableitung.

(b) Sei $\Omega = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$. Gegeben ist die Betragsfunktion

$$u(x) := |x| = \begin{cases} -x & \text{für } x \in (-1, 0) \\ x & \text{für } x \in [0, 1) \end{cases}$$

sowie die Funktion

$$w(x) := x^+ = \max\{x, 0\}.$$

Besitzen diese Funktionen eine schwache Ableitung ? Bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

Aufgabe 4 (Schwache Ableitungen - Teil 2).

(a) Sei $n > 1$ und $i \in \{1, \dots, n\}$. Zeigen Sie: Ist $u\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar bezüglich x_i auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und u sowie $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^1_{\text{lok}}(\mathbb{R}^n)$, so ist $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ die schwache Ableitung von u auf $\mathbb{R}^n$.

Wenden Sie nun diese Aussage auf die Funktion $u(x) = |x|^r$, definiert auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ an. Für welche $r \in \mathbb{R}$ existieren die schwachen Ableitungen ?

Anmerkung: $L^1_{\text{lok}}(\Omega) \coloneqq \{f\colon \Omega \to \mathbb{R} \mid f\big|_{\Omega'} \in L^1(\Omega') \text{ für alle } \Omega' \subset\subset \Omega\}$ und $\Omega' \subset\subset \Omega :\Longleftrightarrow \bar{\Omega}'$ kompakt und $\bar{\Omega}' \subset \Omega$.

(b) Bei der Vertauschung von schwachen Ableitungen ist Vorsicht geboten ! Es kann vorkommen, dass $D^\beta(D^\alpha u)$ existiert, nicht jedoch $D^\alpha(D^\beta u)$. Machen Sie sich dies zum Beispiel anhand der Funktion $u(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{|x_1|}}$ klar, indem Sie die schwachen Ableitungen berechnen.

Die Existenz von $D^\alpha u$ garantiert also nicht die Existenz von $D^\beta u$ für irgendeinen Multiindex β mit $|\beta| < |\alpha|$. Zeigen Sie, dass jedoch folgende Aussage gilt: Ist u schwach differenzierbar bezüglich x^α und $D^\alpha u$ schwach differenzierbar bezüglich x^β, so ist u schwach differenzierbar bezüglich $x^{\alpha+\beta}$ und es gilt $D^{\alpha+\beta} u = D^\beta(D^\alpha u)$.