Fachbereich Mathematik | **Partielle Differentialgleichungen**
Universität Salzburg | **Wintersemester 2016/17**
Prof. Dr. Verena Bögelein | **Besprechung: 12.01.2017**

Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (Jensensche Ungleichung).
Zeigen Sie: Ist $f\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ konvex, $A \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$-messbar mit $0 < \mathcal{L}^n(A) < \infty$ und $u\colon A \to \mathbb{R}$ $\mathcal{L}^n$-integrierbar, so gilt:

$$f\left(\fint_A u(x)\,dx\right) \le \fint_A f(u(x))\,dx$$

Dabei ist $\fint_A u(x)\,dx := \frac{1}{\mathcal{L}^n(A)}\int_A u(x)\,dx$ der Integralmittelwert von u über A.

Aufgabe 2 (Glättung).

(i) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende „Identität“:

$$(u_\varepsilon)^+ \overset{?}{=} (u^+)_\varepsilon.$$

Dabei bezeichnet u_ε wie üblich die Glättung mit einem Standardkern φ_ε und $u^+ := \max\{u, 0\}$ den Positivteil von u.

(ii) Überlegen Sie sich, welche Verknüpfungen von Funktionen man mit Glättungen vertauschen darf. Genauer: Für welche $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

$$f(u_\varepsilon) = (f(u))_\varepsilon\ ?$$

Aufgabe 3 (Fortsetzung eines Funktionals).
Gegeben sei eine lineare Abbildung $\lambda\colon C_0^\infty(U) \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass gilt:

$$|\lambda(g)| \le L \int_U |g(x)|\,dx \quad \text{für alle} \quad g \in C_0^\infty(U),$$

wobei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt sei.
Zeigen Sie, dass man λ zu einer Abbildung $\Lambda\colon L^1(U) \to \mathbb{R}$ fortsetzen kann, welche die Eigenschaft

$$|\lambda(g)| \le L \int_U |g(x)|\,dx \quad \text{für alle} \quad g \in L^1(U)$$

erfüllt.

Aufgabe 4 (Schwache Lösungen der Wellengleichung im $\mathbb{R}^2$).
Betrachten Sie die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^2 \tag{1}$$

mit $u = u(x,t)$.

(i) Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ eine Lösung der Wellengleichung. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(x,t) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x,t) \right) dt\, dx = 0 \tag{2}$$

für alle $\varphi \in C_0^2(\mathbb{R}^2)$ gilt.

(ii) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und u sei definiert durch $u(x,t) := \frac{1}{2}\left(f(x+t) + f(x-t)\right)$. Ist $f \in C^2(\mathbb{R})$, so sieht man durch Nachrechnen, dass u eine Lösung der Wellengleichung (1) ist und mit Teil (i) erfüllt u dann auch die Identität (2) für alle $\varphi \in C_0^2(\mathbb{R}^2)$.

Ist dagegen f nur stetig, so ist im Allgemeinen auch u lediglich stetig. Dann ist u keine Lösung der Wellengleichung in der Form von (1), denn u besitzt im Allgemeinen keine zweiten Ableitungen.

Zeigen Sie, dass u trotzdem die Gleichung (2) erfüllt für alle $\varphi \in C_0^2(\mathbb{R}^2)$.

Hinweis: Betrachten Sie zu $\varepsilon > 0$ die Glättung f_ε von f. Zeigen Sie nun zunächst, dass (2) für die Funktionen $u_\varepsilon(x,t) = \frac{1}{2}(f_\varepsilon(x+t) + f_\varepsilon(x-t))$ gilt und rechtfertigen Sie anschließend, dass man zur Grenze $\varepsilon \downarrow 0$ übergehen darf.

Wir wünschen Ihnen ein frohes Weihnachtsfest
und einen guten Rutsch ins neue Jahr !
