Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Verena Bögelein
Sommersemester 2017

Präsenzblatt zur Topologie

(Besprechung am 07.03.17)

Aufgabe P1 (Wiederholung: Normierter Raum, Banachraum).
Definieren Sie die Begriffe des $\mathbb{K}$-Vektorraums, der Norm und anschließend des normierten Raums. Geben Sie weiterhin eine Definition des Begriffs der Vollständigkeit eines normierten Raums sowie des Banachraums an.

Aufgabe P2 (Beispiele von Topologien).
Sie haben in der Vorlesung die Definition der Topologie, sowie des topologischen Raums kennengelernt. Beweisen Sie nun, dass es sich bei den folgenden Beispielen aus der Vorlesung tatsächlich um Topologien handelt:

(a) Sei X eine Menge. Dann heißt

- $\mathcal{T}_{\text{dis}} := \mathcal{P}(X)$ die *diskrete Topologie* auf X.
- $\mathcal{T}_{\text{ind}} := \{\emptyset, X\}$ die *indiskrete Topologie* auf X.

(b) Sei X eine Menge mit $|X| = 2$, zum Beispiel $X = \{0, 1\}$. Dann heißt

$$\mathcal{T}_{\text{S}} := \{\emptyset, \{0\}, X\}$$

die *Sierpinski-Topologie* auf X; das Paar $(X, \mathcal{T}_{\text{S}})$ heißt dann *Sierpinski-Raum.*

(c) Sei X eine unendliche Menge, also $|X| = \infty$. Dann heißt

$$\mathcal{T}_{\text{kof}} := \{X \setminus E \colon E \subset X \text{ und } |E| < \infty\} \cup \{\emptyset\}$$

die *kofinite Topologie* auf X. Im Fall $|X| < \infty$ ist $\mathcal{T}_{\text{kof}} = \mathcal{T}_{\text{dis}}$.

(d) Für $X = \mathbb{R}$ definieren wir folgende Topologien:

- $\mathcal{T} := \{\bigcup_{i\in I}(a_i, b_i) \colon a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i < b_i \text{ für alle } i \in I, I \text{ beliebige Indexmenge}\} \cup \{\emptyset\}$,
- $\mathcal{T}' := \{\bigcup_{i\in I}(-\infty, b_i] \colon b_i \in \mathbb{R} \text{ für alle } i \in I, I \text{ beliebige Indexmenge}\} \cup \{\emptyset\}$,
- $\mathcal{T}'' := \{(-\infty, b) \colon b \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.

Es gelten dabei die Inklusionen $\mathcal{T}'' \subset \mathcal{T}$ und $\mathcal{T}'' \subset \mathcal{T}'$, jedoch auch $\mathcal{T}' \not\subset \mathcal{T}$ und $\mathcal{T} \not\subset \mathcal{T}'$.

(e) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann heißt

$$\mathcal{T}_{\text{d}} := \{O \subseteq X \colon \text{für alle } x \in O \text{ gibt es ein } r > 0 \text{ mit } B_r(x) \subset O\}$$

die *durch die Metrik d definierte* oder *induzierte Topologie.* Im Fall $(X, d) = (\mathbb{R}^n, d_2)$ mit der euklidischen Metrik d_2 heißt $\mathcal{T}_{\text{d}}$ auch *kanonische*, *natürliche* oder *Standardtopologie* und wird dann mit $\mathcal{T}_{\text{kan}}$ bezeichnet. In Teilaufgabe (d) gilt zum Beispiel $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{kan}}$ auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe P3 (Offener Kern und abgeschlossene Hülle).

Betrachten Sie die beiden topologischen Räume $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{kan}})$ und $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{kof}})$. Bestimmen Sie jeweils den offenen Kern $\mathring{M}$ bzw. die abgeschlossene Hülle $\bar{M}$ der folgenden Mengen M bezüglich beider Topologien:

(a) $M = [a, b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$,

(b) $M = \mathbb{Z}$,

(c) $M = \mathbb{Q}$.