UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Univ.-Prof. Dr. Verena Bögelein
Sommersemester 2018

04. Blatt zur Übung Analysis II
(Besprechung am 16.04.2018)

Theorieaufgaben.

(1) Definieren Sie die Begriffe *punktweise* bzw. *gleichmäßige Konvergenz*. Erklären Sie dabei insbesondere die Unterschiede.

Beweisaufgaben.

Aufgabe 14. Sei $c > 0$ eine Konstante. Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (in Abhängigkeit von c) auf punktweise bzw. gleichmäßige Konvergenz bei $n \to \infty$. Geben Sie im Fall der Konvergenz jeweils an, gegen welche Funktion f die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

(a) $f_n(x) = \dfrac{|x^3 + 2nx - cn|}{n^2}$ für alle $x \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$;

(b) $f_n(x) = \sqrt{\dfrac{c}{\sqrt{n}} + x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$;

(c) $f_n(x) = c\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{x^2 + c - 1}{(x^2 + c)^i}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 15. Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf punktweise bzw. gleichmäßige Konvergenz bei $n \to \infty$. Geben Sie im Fall der Konvergenz jeweils an, gegen welche Funktion f die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

(a) $f_n(x) = nx^2 e^{-x/n}$ für alle $x \in \mathbb{R}$;

(b) $f_n(x) = \dfrac{nx^2 + (n-1)x}{nx + 1}$ für alle $x \in [0, \infty)$;

(c) $f_n(x) = \sqrt{n}\sin(nx)\chi_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 16. Sei $\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ die Menge der stetigen und beschränkten Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit Werten in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie: Ist $f_n \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und gleichmäßig stetig für alle $n \in \mathbb{N}$ und gilt $f_n \to f$ gleichmäßig bei $n \to \infty$ für eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, dann ist $f \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und gleichmäßig stetig.