UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Univ.-Prof. Dr. Verena Bögelein
Sommersemester 2018

07. Blatt zur Übung Analysis II

(Besprechung am 07.05.2018)

Theorieaufgaben.

(1) Erklären Sie die Begriffe des *Inneren*, *Äußeren*, *Randes*, und *Abschlusses* einer Menge. Beginnen Sie dafür mit der Definition der Begriffe *innerer Punkt*, *äußerer Punkt*, und *Randpunkt*.

(2) Erklären Sie den Begriff des *topologischen Raumes*.

Beweisaufgaben.

Aufgabe 25. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zeigen Sie: Die Norm $\|\cdot\|$ wird durch ein Skalarprodukt induziert genau dann, wenn die sogenannte Parallelogrammgleichung gilt:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

Hinweis: Definieren Sie für den Beweis der Rückrichtung das Skalarprodukt als

$$x \cdot y = \tfrac{1}{4}\big[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big] \quad \text{für } x, y \in X.$$

Bemerkung: Allgemeiner würde sich die Aussage auch analog mit etwas aufwändigeren Rechnungen für normierte $\mathbb{C}$-Vektorräume zeigen lassen, dies ist jedoch nicht verlangt. Das Skalarprodukt für die Begründung der Rückrichtung wäre in diesem Fall als

$$x \cdot y = \tfrac{1}{4}\big[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big] + \tfrac{i}{4}\big[\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\big] \quad \text{für } x, y \in X$$

zu definieren.

Aufgabe 26. Wir definieren die Mengen $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^2$ und $M_3, M_4, M_5 \subset \mathbb{R}^3$ durch

$$\begin{aligned}
M_1 &= B_r(z) = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon \|x - z\| < r\} \text{ für } r > 0 \text{ und } z \in \mathbb{R}^2,\\
M_2 &= S_1(0) \cup \{(0,0)\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon \|x\| \in \{0,1\}\},\\
M_3 &= \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{Q}^3,\\
M_4 &= \big[((2\mathbb{Z}) \setminus \mathbb{N}) \cup (2\mathbb{N} - 1)\big]^3,\\
M_5 &= \big[A \cup (\mathbb{R}^2 \times \{0\})\big] \setminus \big[(0,0) \times \mathbb{R}\big], \text{ wobei } A = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon \|x\| \le 1\}.
\end{aligned}$$

Hierbei bezeichnen $\|\cdot\|$ die 2- bzw. 3-dimensionale euklidische Norm, und $2M = \{2m \colon m \in M\}$ für eine Menge M.

(a) Bestimmen Sie für $1 \le i \le 5$ das Innere $\mathring{M}_i$, den Abschluss $\overline{M_i}$, den Rand ∂M_i, die Menge der Häufungspunkte M_i', und die Menge der isolierten Punkte $M_i \setminus M_i'$. Sie sollen Ihre Antworten kurz begründen, ein detaillierter Beweis wird jedoch nicht verlangt.

(b) Welche der Mengen M_i $(1 \le i \le 5)$ sind offen bzw. abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$ ($n = 2$ für $i \in \{1,2\}$, $n = 3$ für $i \in \{3,4,5\}$)?

(c) Welche der Mengen M_i $(1 \le i \le 5)$ sind dicht, nirgends dicht bzw. diskret in $\mathbb{R}^n$ ($n = 2$ für $i \in \{1,2\}$, $n = 3$ für $i \in \{3,4,5\}$)?

Aufgabe 27. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$ eine beliebige Teilmenge.

(a) Zeigen Sie:

(i) $\overset{\circ}{M} = M \setminus \partial M$;

(ii) $\overline{M} = M \cup \partial M$;

(iii) $\overline{M} = M \cup M'$, wobei M' die Menge der Häufungspunkte von M bezeichne;

(iv) $\partial M = \overline{M} \setminus \overset{\circ}{M} = \partial(X \setminus M)$;

(v) $\mathrm{int}(\mathrm{int}(M)) = \mathrm{int}(M)$, wobei $\mathrm{int}(M) = \overset{\circ}{M}$ das Innere der Menge M bezeichne;

(vi) $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$;

(vii) $\partial(\partial M) \subset \partial M$.

(b) Zeigen Sie durch Angabe einer Menge in $\mathbb{R}^n$, deren Rand innere Punkte hat, dass die letzte Inklusion (vii) in Aufgabe (a) im Allgemeinen keine Gleichheit ist.

Aufgabe 28.

(a) Sei X eine 3-elementige Menge. Bestimmen Sie alle 29 Topologien auf X.

(b) Sei X eine unendliche Menge (eine Menge heißt unendlich, wenn sie nicht endlich ist). Prüfen Sie, ob die Mengensysteme

$$\mathcal{M} = \{X \setminus M : M \text{ höchstens abzählbar}\} \cup \{\emptyset\} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{M}' = \{X \setminus M : M \text{ unendlich}\} \cup \{X\}$$

Topologien auf X sind.

Aufgabe 29. Aus der Vorlesung wissen Sie, dass es Topologien gibt, die von einer Metrik induziert werden. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass nicht jede Topologie von einer Metrik induziert wird. Sei dazu X eine mindestens 2-elementige Menge. Zeigen Sie, dass die sogenannte Klumpen– bzw. indiskrete Topologie $\{\emptyset, X\}$ nicht metrisierbar ist.