UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Univ.-Prof. Dr. Verena Bögelein
Sommersemester 2018

08. Blatt zur Übung Analysis II

(Besprechung am 14.05.2018)

Theorieaufgaben.

(1) Erklären Sie im Kontext metrischer Räume die Begriffe der *Folgenkonvergenz* bzw. des *Häufungspunktes*.

Beweisaufgaben.

Aufgabe 30. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $a \in X$. Zudem sei die Abbildung $d_a \colon X \times X \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$d_a(x,y) = \begin{cases} d(x,a) + d(y,a) & \text{für } x, y \in X \text{ mit } x \neq y, \\ 0 & \text{für } x, y \in X \text{ mit } x = y. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie zunächst, dass (X, d_a) ein metrischer Raum ist.

Von jetzt an seien $X = \mathbb{C}$, $d(x,y) = |x - y|$ für $x, y \in \mathbb{C}$, sowie $a = 1$. $(*)$

(b) Stellen Sie die Kugel $B_r^{d_a}(0) = \{z \in \mathbb{C} \colon d_a(z, 0) \leq r\}$ für $r \geq 0$ in möglichst vereinfachter Form dar.

(c) Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die bezüglich d_a gegen $z_\infty = 1$ $(= 1 + 0 \cdot i)$ konvergiert. Zeigen Sie, dass $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch bezüglich $|\cdot|$ gegen 1 konvergiert.

(d) Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die bezüglich d_a gegen $z_\infty \neq 1$ konvergiert. Zeigen Sie, dass es eine Zahl $N \in N$ gibt mit $z_n = z_\infty$ für alle $n \geq N$.

Aufgabe 31 (Fortsetzung von Aufgabe 30).
Es seien weiterhin die Annahmen aus $(*)$ gültig.

(e) Wir betrachten nun die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gegeben durch $z_n = 2 + \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezüglich d_a beschränkt ist und keine Häufungspunkte besitzt.

(f) Interpretieren Sie das Ergebnis aus (e) im Hinblick auf die Aussage des Satzes von Bolzano-Weierstraß.