Fachbereich Mathematik
Univ.-Prof. Dr. Verena Bögelein
Sommersemester 2018

09. Blatt zur Übung Analysis II (Teil B)
(Besprechung am 28.05.2018)

Theorieaufgaben.

(1) Erklären Sie den Begriff der Stetigkeit einer Abbildung zwischen metrischen Räumen, und geben Sie zudem eine topologische Charakterisierung der Stetigkeit an.

(2) Formulieren Sie Kriterien, die die Stetigkeit einer linearen Abbildung garantieren, und erklären Sie den Begriff der Operatornorm.

Beweisaufgaben.

Aufgabe 32. Es bezeichne $C^1([0,1],\mathbb{R})$ den Vektorraum der stetig differenzierbaren Funktionen von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die durch

$$\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|$$

definierte Abbildung eine Norm auf $C^1([0,1],\mathbb{R})$ definiert.

Aufgabe 33.

(a) Es bezeichne $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass jede (andere) Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion auf $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ ist.
Hinweis: Schreiben Sie Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ in ihrer Basisdarstellung

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e^{(i)}$$

mit $x_i \in \mathbb{R}$ für alle $i \in \{1,\dots,n\}$, wobei $\{e^{(i)} \in \mathbb{R}^n : 1 \le i \le n\}$ die (aus den Einheitsvektoren gebildete) Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ bezeichne, d. h. $e^{(i)}_j = \delta_{ij}$ mit Kronecker-Delta δ_{ij} für alle $i,j \in \{1,\dots,n\}$.

(b) In dieser Aufgabe soll bewiesen werden, dass alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ paarweise äquivalent sind. Zeigen Sie also, dass für zwei beliebige Normen $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ auf $\mathbb{R}^n$ zwei Konstanten $c_1, c_2 > 0$ existieren so, dass

$$c_1 |||x||| \le \|x\| \le c_2 |||x|||$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.
Hinweis: Der Satz vom Maximum gilt allgemein auf kompakten metrischen Räumen K, d. h. eine stetige Funktion $f\colon K \to \mathbb{R}$ nimmt ihr Maximum und Minimum auf K an. Nutzen Sie außerdem aus, dass die Einheitssphäre $S_1(0)$ kompakt ist bezüglich der euklidischen Norm auf $\mathbb{R}^n$, und wenden Sie anschließend die Teilaufgabe (a) an.

Anmerkung: Allgemeiner lässt sich (mit analogem Beweis) zeigen, dass auf jedem endlichdimensionalen Raum X alle Normen paarweise äquivalent sind. (Dies ist hier jedoch nicht verlangt.)

Aufgabe 34. Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass jede lineare Funktion $\ell\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig ist.
Hinweis: Verwenden Sie eine Basisdarstellung und das Ergebnis von Aufgabe 33.
Anmerkung: Allgemeiner lässt sich (mit analogem Beweis) zeigen, dass jede lineare Funktion $\ell\colon X \to Y$ zwischen endlichdimensionalen normierten Räumen X, Y stetig ist. (Dies ist hier jedoch nicht verlangt.)

Aufgabe 35. Seien $-\infty < a < b < \infty$ und $X = C^0([a,b])$ der Vektorraum der stetigen reellwertigen Funktionen auf $[a,b]$. Auf X seien die beiden Normen

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx \quad \text{und} \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

definiert. Ferner sei $k\colon [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir definieren die Abbildung $K\colon X \to X$ durch

$$(Kf)(x) = \int_a^b k(x,y) f(y)\,dy \quad \text{für alle } x \in [a,b] \ \text{ für alle } f \in X.$$

(a) Überprüfen Sie, dass $Kf \in X$, und zeigen Sie, dass K eine lineare Abbildung ist.

(b) Zeigen Sie, dass $K\colon (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_1)$ stetig ist.

(c) Zeigen Sie, dass $K\colon (X, \|\cdot\|_\infty) \to (X, \|\cdot\|_\infty)$ stetig ist.

(d) Zeigen Sie, dass $K\colon (X, \|\cdot\|_\infty) \to (X, \|\cdot\|_1)$ stetig ist.

(e) Zeigen Sie, dass $K\colon (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_\infty)$ stetig ist.

Geben Sie bei den Aufgaben (b)–(e) jeweils eine obere Schranke an die Operatornorm von K an.

Aufgabe 36. Es sei für $b \in (0,\infty)$ der Vektorraum $X = C^0([0,b])$ der stetigen reellwertigen Funktionen $f\colon [0,b] \to \mathbb{R}$ mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|\colon t \in [0,b]\}$ versehen. Die dazu assoziierte Metrik $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $d(f,g) = \|f-g\|_\infty$ für alle $f, g \in X$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $F\colon (X,d) \to (X,d)$, definiert durch

$$F(f)(t) = \int_0^t f(s)\,ds \quad \text{für alle } t \in [0,b] \ \text{ für alle } f \in X,$$

Lipschitz-stetig ist.