Topologie

Vorlesung von Johann Linhart

Wintersemester 2008/09

Inhaltsverzeichnis

Introduction

Die Topologie entstand aus der Beschäftigung mit geometrischen Problemen, bei denen es nur auf die gegenseitige Lage der Objekte ankam ("analysis situs"). Ein berühmtes Beispiel dafür ist das "Königsberger Brückenproblem" (1736), das Sie vielleicht von der Diskreten Mathematik her kennen. Bei diesem Problem ging es um die Frage, ob man in Königsberg einen Spaziergang so planen kann, dass man jede der sieben Brücken genau einmal überschreitet. *Euler* erkannte, dass es nur darauf ankommt, dass es in einem entsprechenden Graphen einen Kantenzug gibt, der jede Kante genau einmal enthält. Heute werden derartige Probleme zur Graphentheorie gerechnet.

Die eigentliche Topologie entstand aus Problemen der Analysis, welche in Zusammenhang mit den Begriffen "Konvergenz" und "Stetigkeit" auftraten (*Riemann, Cauchy, Abel, Bolzano, Weierstraß, Gauß, Dedekind, Cantor*). Von besonderer Bedeutung sind die Arbeiten von *Poincaré* über Flächen und Mannigfaltigkeiten (um 1900). Als Beispiel für eines der ersten tieferliegenden Resultate der topologischen Betrachtungsweise möchte ich den folgenden Fixpunktsatz von *Brouwer* (1912) zitieren:

"Sei K eine n-dimensionale Vollkugel (z.B. die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$). Jede stetige Abbildung $f : K \to K$ hat einen Fixpunkt, d.h. es gibt ein $x \in K$ mit $f(x) = x$."

Es kommt dabei nicht darauf an, dass K wirklich eine Kugel ist. K kann auch eine beliebig "deformierte" Kugel sein. Bei der Deformation dürfen nur keine "Löcher" oder mehrere Teile entstehen: Wenn K z.B. ein Kreisring ist, dann ist jede Drehung um den Mittelpunkt des Kreisrings stetig und fixpunktfrei.

Die Topologie kann angesehen werden als die Lehre von denjenigen Eigenschaften (geometrischer oder) mathematischer Objekte, die bei umkehrbaren, in beiden Richtungen stetigen Abbildungen unverändert bleiben. Solche Abbildungen heißen *topologische Abbildungen* oder *Homöomorphismen*. Eine solche Eigenschaft ist z.B. auf Grund des obigen Satzes die, dass jede stetige Selbst-Abbildung einen Fixpunkt hat. Das ist analog zur Betrachtung etwa der affinen Geometrie (im Sinne von *Felix Klein*) als Lehre von den Eigenschaften, die bei Affinitäten unverändert bleiben.

Wesentlich für die weitere Entwicklung der Topologie war die exakte Festlegung der vorkommenden Begriffe (wie z.B. "stetig" oder "Deformation"). Unter dem Einfluss von *Hilbert* hat vor allem *Hausdorff* (um 1914) eine exakte axiomatische Grundlage der Topologie geschaffen. Eingehende Untersuchungen der Hausdorff'schen Axiome erfolgten insbesondere durch *Urysohn*.

Tychonoff entwickelte den wichtigen Grundbegriff der Kompaktheit (um 1920), zu den auch der Österreicher *Vietoris* Wesentliches beigetragen hat. Der zentrale Begriff "Konvergenz" wurde insbesondere von *Moore* und *Smith* ("Netze", 1922) und *Cartan* ("Filter", 1937) einer eingehenden Analyse unterzogen.

Häufig können topologische Probleme dadurch gelöst werden, dass man eine in bestimmter Weise zugehörige Gruppe untersucht (z.B. beim Brouwer'schen Fixpunktsatz). (Dabei handelt es sich im Allgmeinen aber nicht um die Gruppe der Homöomorphismen.) Der Teil der Topologie, in dem solcherart algebraische Methoden Verwendung finden, heißt "Algebraische Topologie" (*Poincaré* 1895, *Hurewitz* 1935 (Homotopie), *Eilenberg-Steenrod* 1952 (Homologie)). Dieser Zweig der Topologie wird aber in dieser Vorlesung nicht behandelt. Wir beschränken uns auf die sogenannten "allgemeine" oder "mengentheoretische" Topologie.

Eine Auswahl der zahlreichen Bücher über Topologie finden Sie im Literaturverzeichnis am Ende dieses Skriptums. Für den Anfang eignen sich am ehesten die Bücher von Cigler/Reichel [1], Führer [4] (beide deutsch) und Dixmier [2] (englisch). Von den etwas weiter gehenden würde ich das von Wilansky [8] (englisch) empfehlen .

Kapitel 1

Metrische Räume

Eine häufig verwendete Möglichkeit, "Konvergenz" exakt zu definieren, beruht auf der Einführung einer "Metrik":

Definition 1.1 *Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften heißt **Halbmetrik** (oder **Pseudometrik**) auf X:*

1. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(z,y)$ *für alle* $x, y, z, \in X$ *("Dreiecksungleichung"),*

2. $d(x,x) = 0$ *für alle* $x \in X$.

*Wenn außerdem $d(x,y) > 0$ für $x \neq y$, so heißt d **Metrik** auf X.*
*(X, d) heißt dann **(halb)metrischer Raum.***

Einfache Eigenschaften einer Halbmetrik d:

- $d(x,y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$.

  Beweis: $0 = d(x,x) \leq d(x,y) + d(x,y) = 2\ d(x,y)$.

- $d(x,y) = d(y,x)$ für alle $x, y \in X$. (*"Symmetrie"*)

  Beweis: $d(y,z) \leq d(y,y) + d(z,y) = d(z,y)$, also $d(y,z) \leq d(z,y)$,

  und analog $d(z,y) \leq d(y,z)$. Es folgt $d(y,z) = d(z,y)$ für alle $y, z \in X$.

Bemerkung: Die Symmetrie wird manchmal zu den definierenden Eigenschaften einer Halbmetrik hinzugenommen. Dann kann man die Dreiecksungleichung auch so schreiben: $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Beispiele:

1. Das bekannteste Beispiel eines metrischen Raumes ist der $\mathbb{R}^n$ mit $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}$. Man nennt das die *euklidische Metrik.* (Dabei ist natürlich $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$.)

   Die Gültigkeit der Dreiecksungleichung für diese Metrik wird üblicherweise in der Linearen Algebra gezeigt.

   Wenn nichts anderes gesagt wird, nehmen wir immer an, dass der $\mathbb{R}^n$ mit dieser Metrik versehen ist.

2. Andere Metriken auf dem $\mathbb{R}^n$ sind:

   $d_1(x, y) := \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|$ *(Summenmetrik),*

   $d_\infty(x, y) := \max\limits_{1 \le k \le n} |x_k - y_k|$ *(Maximumsmetrik).*

   Bei diesen beiden Metriken ist die Dreiecksungleichung ganz leicht einzusehen.

   d_1 kann man sich anschaulich als die Entfernung in einer Stadt mit rechtwinkelig angeordneten Straßen vorstellen.

3. Jede Teilmenge Y eines (halb)metrischen Raumes X (also insbesondere auch des $\mathbb{R}^n$ mit einer der obigen Metriken) ist wieder ein (halb)metrischer Raum, wenn man die (Halb-)Metrik auf $Y \times Y$ einschränkt.

4. Sei $S_n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ die *Einheitssphäre* des $\mathbb{R}^{n+1}$.

   S_n ist nach 3. ein metrischer Raum mit der euklidischen Metrik, eingeschränkt auf $S_n \times S_n$. Auf S_n gibt es aber noch eine andere sehr natürliche Metrik:

   $d_0(x, y) := \arccos(x \cdot y)$, das ist also der Winkel, den die beiden Vektoren x und y einschließen.

   Die Dreiecksungleichung folgt hier aus dem Seitenkosinussatz der sphärischen Trigonometrie:

   Sei $a = \arccos(y \cdot z)$, $b = \arccos(x \cdot z)$, $c = \arccos(x \cdot y)$. Dann besagt der Seitenkosinussatz

   $\cos b = \cos c \cdot \cos a + \sin c \cdot \sin a \cdot \cos \beta$,

   und das ist $\ge \cos c \cdot \cos a - \sin c \cdot \sin a = \cos(c + a)$.

   Der Kosinus ist auf $[0, \pi]$ monoton fallend, also folgt $b \le c + a$ und somit die Dreiecksungleichung.

   Bemerkung: $d_0(x, y)$ kann man auch als die Länge des kürzesten Bogens ansehen, der die Punkte x und y auf der Sphäre S_n verbindet. In dieser Interpretation ist die Dreiecksungleichung trivial.

5. Sei Y eine beliebige Menge. Eine Abbildung $f : Y \to \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, wenn $\sup\limits_{x \in Y} |f(x)| < \infty$.

   Auf der Menge $\mathcal{B}(Y)$ aller beschränkten Funktionen von Y nach $\mathbb{R}$ kann man folgenderweise eine Metrik definieren:

   $d(f, g) := \sup\limits_{x \in Y} |f(x) - g(x)|$.

   Das ist wirklich eine reelle Zahl, da $|f(x) - g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \sup |f(x)| + \sup |g(x)|$ für alle $x \in Y$.

   Die Dreiecksungleichung ist auch hier einfach einzusehen:

   $d(f, h) = \sup\limits_{x \in Y} |f(x) - h(x)| \leq \sup(|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|) \leq$

   $\leq \sup |f(x) - g(x)| + \sup |g(x) - h(x)| \leq d(f, g) + d(g, h)$.

6. Sei $\mathcal{C}[a, b]$ die Menge aller stetigen Funktionen $[a, b] \to \mathbb{R}$.

   $\mathcal{C}[a, b]$ ist natürlich eine Teilmenge von $\mathcal{B}[a, b]$, also ebenfalls ein metrischer Raum mit obiger Metrik. Wenn nichts anderes gesagt wird, nehmen wir immer an, dass $\mathcal{C}[a, b]$ mit dieser Metrik versehen ist.

   Auf $\mathcal{C}[a, b]$ sind aber noch andere Metriken interessant, z.B. folgende:

   $d_1(f, g) := \int_a^b |f(x) - g(x)| \ dx$.

   Die Dreicksungleichung folgt ganz leicht aus $|f(x) - h(x)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|$.

   Hier sollte man vielleicht kurz nachdenken, dass es sich tatsächlich um eine Metrik und nicht nur um eine Halbmetrik handelt. Sei $s := |f - g|$. Wenn $f \neq g$ ist, dann gibt es ein $x_0 \in [a, b]$ mit $\varepsilon := s(x_0) > 0$. Wegen der Stetigkeit von s gibt es dann ein $\delta > 0$, sodass $s(x) > \varepsilon/2$ für alle $x \in [a, b]$ mit $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, das heißt für alle $x \in (u, v)$ mit $u := \max\{a, x_0 - \delta\}$ und $v := \min\{b, x_0 + \delta\}$.

   Wegen $s(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ folgt dann:

   $d_1(f, g) = \int_a^b s(x) \ dx \geq \int_u^v s(x) \ dx \geq (v - u) \cdot \varepsilon/2 > 0$.

7. Ein Beispiel für einen halbmetrischen Raum, der nicht metrisch ist:

   Wir betrachten den $\mathbb{R}^2$ mit $d'(x, y) := |x_1 - y_1|$.

   Hier ist $d'((a, b), (a, c)) = 0$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Die folgenden Abbildungen haben für (halb)metrische Räume eine besondere Bedeutung:

Definition 1.2 *Seien (X, d) und (X', d') halbmetrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to X'$ heißt* ***Isometrie****, wenn*

$$d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

für alle $x, y \in X$.

Isometrien lassen also den Abstand invariant, d.h. unverändert.

Bemerkung 1.3 *Jede Isometrie von metrischen Räumen ist injektiv. Daher ist jede surjektive Isometrie bijektiv.*

Beweis: $x \neq y \Rightarrow d(x, y) > 0 \Rightarrow d'(f(x), f(y)) > 0 \Rightarrow f(x) \neq f(y)$. ■

Definition 1.4 *Sei (X, d) ein (halb)metrischer Raum, $x \in X$, $\varepsilon > 0$.*
$K_\varepsilon(x) := \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$ heißt ***ε-Kugel um*** *x (oder* ***ε-Kugel mit Mittelpunkt*** *x).*

Definition 1.5 *Eine Teilmenge G von X heißt* ***offen*** *(in (X, d)), wenn es für jedes $x \in G$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass $K_\varepsilon(x) \subset G$.*

(Mit "$\subset$" bezeichnen wir die Inklusion unter Einbeziehung der Möglichkeit, dass Gleichheit vorliegt. Diese Situation wird in der Literatur manchmal auch mit "$\subseteq$" bezeichnet. Wenn wir die Gleichheit ausschließen wollen, schreiben wir "$\subsetneq$".)

Bemerkung 1.6 *Jede ε-Kugel $K_\varepsilon(x)$ ist offen.*

Beweis: Sei $x' \in K_\varepsilon(x)$, also $d(x', x) < \varepsilon$.
Sei $\varepsilon' := \varepsilon - d(x', x) > 0$. Dann folgt $K_{\varepsilon'}(x') \subset K_\varepsilon(x)$, denn
$d(y, x') \leq \varepsilon' \Rightarrow d(y, x) \leq d(y, x') + d(x, x') < \varepsilon' + d(x, x') = \varepsilon' + d(x', x) = \varepsilon$. ■

Bemerkung 1.7 *Insbesondere ist in $\mathbb{R}$ jedes offene Intervall $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ auch offen bezüglich der üblichen Metrik von $\mathbb{R}$.*

Beweis: $(a, b) = K_\varepsilon(\frac{a+b}{2})$ mit $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. ■

Übungsaufgabe 1.8 *Skizzieren Sie ε-Kugeln bezüglich der vorhin genannten Metriken bzw. Halbmetriken!*

Satz 1.9 *Sei (X, d) ein (halb)metrischer Raum und τ_d die Menge aller offenen Teilmengen darin. Dann gilt:*

1. *$\emptyset \in \tau_d$ und $X \in \tau_d$.*
2. *Wenn $G_i \in \tau_d$ für alle i aus einer beliebigen Indexmenge I, dann ist auch $\bigcup_{i \in I} G_i \in \tau_d$.*

   (D.h. die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist wieder offen.)
3. *Wenn $G_1 \in \tau_d$ und $G_2 \in \tau_d$, dann ist auch $G_1 \cap G_2 \in \tau_d$.*

   (D.h. der Durchschnitt von je zwei offenen Mengen ist wieder offen.)

Beweis:

1. trivial.
2. Sei $x \in \bigcup_{i \in I} G_i$. Dann gibt es ein $i_0 \in I$, sodass $x \in G_{i_0}$.

   Da G_{i_0} offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $K_\varepsilon(x) \subset G_{i_0}$, und $G_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} G_i$.
3. Sei $x \in G_1 \cap G_2$. Dann gibt es $\varepsilon_1 > 0$ mit $K_{\varepsilon_1}(x) \subset G_1$ und $\varepsilon_2 > 0$ mit $K_{\varepsilon_2}(x) \subset G_2$.

   Sei $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Dann ist $K_\varepsilon(x) \subset K_{\varepsilon_1}(x) \cap K_{\varepsilon_2}(x) \subset G_1 \cap G_2$. ■

Bemerkung 1.10 *Nach 3. folgt mit Induktion:*

$G_1, \ldots, G_n \in \tau_d \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \tau_d$,

d.h. der Durchschnitt von je endlich vielen offenen Mengen ist wieder offen.
Das gilt jedoch im Allgemeinen nicht für unendlich viele offene Mengen.

Gegenbeispiel: $G_n := (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ ist offen für alle $n \in \mathbb{N}$, aber $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \{0\}$ ist nicht offen. ■

Kapitel 2

Topologien

"Metrik" ist eigentlich kein topologischer Begriff (in dem in der Einleitung erklärten Sinne), da er nicht invariant gegenüber "Verzerrungen" ist. Das führt zu folgender Begriffsbildung:

Definition 2.1 *Sei X eine Menge. Unter einer* ***Topologie*** *auf X versteht man eine Teilmenge τ der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. $\emptyset \in \tau$ *und* $X \in \tau$.

2. *Wenn* $G_i \in \tau$ *für alle* i *aus einer beliebigen Indexmenge* I, *dann ist auch* $\bigcup_{i \in I} G_i \in \tau$.

3. *Wenn* $G_1 \in \tau$ *und* $G_2 \in \tau$, *dann ist auch* $G_1 \cap G_2 \in \tau_d$.

(X, τ) heißt dann ***topologischer Raum****. Die Elemente von X heißen auch* ***Punkte****. Die Elemente von τ heißen* ***offene Mengen****.*

Die offenen Mengen in einem metrischen Raum bilden also eine Topologie. Man nennt sie **die von der Metrik induzierte Topologie**.

Natürlich kann man auch hier die 3. Eigenschaft für beliebige endliche Durchschnitte formulieren (vgl. Bemerkung 1.10).

Wenn keine Verwechslung zu befürchten ist, schreibt man statt (X, τ) meist kurz X.

Triviale *Beispiele* von Topologien, die man auf jeder Menge X definieren kann, sind die folgenden beiden:

- $\tau = \mathcal{P}(X)$, die **diskrete Topologie**.
- $\tau = \{\emptyset, X\}$, die **indiskrete Topologie**.

Ein weiteres Beispiel:

- $\tau = \{G \in \mathcal{P}(X) : G = \emptyset$ oder $X \backslash G$ ist endlich$\}$, die **kofinite Topologie**.

Übungsaufgabe 2.2 *Zeigen Sie, dass diese drei Beispiele wirklich Topologien sind!*

Für endliche Mengen X ist die kofinite Topologie natürlich dasselbe wie die diskrete Topologie.

Definition 2.3 *Wenn es zu einer Topologie τ auf X eine Metrik d auf X gibt, sodass $\tau = \tau_d$, so heißt τ **metrisierbar**.*

Der Begriff "**halbmetrisierbar**" wird natürlich analog definiert.

Beispiele:

1. Die diskrete Topologie kann durch folgende Metrik induziert werden:

   $d(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \neq y, \\ 0 & \text{für} \quad x = y, \end{cases}$

   denn dann gilt für jede nichtleere Teilmenge G von X:

   $x \in G \Rightarrow K_1(x) = \{x\} \subset G.$

   (Überlegen Sie sich, dass dieses d wirklich eine Metrik ist!)

2. Die indiskrete Topologie kann durch folgende Halbmetrik induziert werden:

   $d(x, y) := 0$ für alle $x, y \in X$.

   Diese Topologie ist aber nicht metrisierbar, falls X mindestens zwei Elemente enthält: Wenn x und y zwei verschiedene Elemente von X sind, müsste dann ja $d(x, y) > 0$ sein.

3. Man kann zeigen, dass die kofinite Topologie nicht einmal halbmetrisierbar ist, wenn X eine unendliche Menge ist. Dazu fehlen uns aber noch einige Hilfsmittel.

   Hier ist ein anderes, einfacheres Beispiel einer nicht halbmetrisierbaren Topologie:

   Sei $X = \{1, 2\}$ und $\tau = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$.

   Angenommen, es gibt eine Halbmetrik d, sodass $\tau = \tau_d$.

   1. Fall: $d(1, 2) = 0$. Dann ist $d(x, y) = 0$ für alle $x, y \in X$ und daher $\tau_d = \{\emptyset, X\} \neq \tau$.

   2. Fall: $d(1, 2) = a > 0$. Dann ist $\tau_d = \mathcal{P}(X)$, wie man analog zu dem oben behandelten Fall $a = 1$ sieht, und daher wieder $\tau_d \neq \tau$.

Kapitel 3

Umgebungen

Sei (X, τ) ein topologischer Raum.

Definition 3.1 *Eine Teilmenge U von X heißt **Umgebung** von $x \in X$, wenn es eine offene Menge G gibt, sodass*

$$x \in G \subset U.$$

Die Menge aller Umgebungen von x bezeichnen wir mit $\mathcal{U}(x)$.

Bemerkung 3.2 *Eine offene Menge, welche x enthält, ist eine Umgebung von x. Eine offene Menge ist daher Umgebung von jedem ihrer Punkte.*

Beweis: Setze $G := U$. ■

Bemerkung 3.3 *Eine offene Menge ist daher Umgebung von jedem ihrer Punkte.*

Davon gilt auch die Umkehrung:

Satz 3.4 *Eine Teilmenge M von X ist genau dann offen, wenn sie Umgebung von jedem ihrer Punkte ist.*

Beweis: Sei M Umgebung von jedem $x \in M$. Dann gilt:
Für alle $x \in M$ gibt es eine offene Menge G_x, sodass $x \in G_x \subset M$.
Es folgt: $M = \bigcup_{x \in M} G_x$, und das ist eine offene Menge, da die Vereinigung von offenen Mengen ebenfalls offen ist. ■

Bemerkung 3.5 *Jede Obermenge einer Umgebung von x ist auch eine Umgebung von x.*

Beweis: $x \in G \subset U \subset V \Rightarrow x \in G \subset V$. ■

Bemerkung 3.6 *Der Durchschnitt endlich vieler Umgebungen von x ist auch eine Umgebung von x.*

Beweis:
Für zwei Umgebungen:
$(x \in G_1 \subset U_1) \wedge (x \in G_2 \subset U_2) \Rightarrow x \in G_1 \cap G_2 \subset U_1 \cap U_2$.
Allgemein: mit Induktion. ■

Bemerkung 3.7 *In einem metrischen Raum ist $K_\varepsilon(x)$ eine Umgebung von x, da $K_\varepsilon(x)$ offen ist. Daher ist auch jede Obermenge von $K_\varepsilon(x)$ eine Umgebung von x. Umgekehrt ist jede Umgebung von x Obermenge einer ε-Kugel um x.*

Beweis der 2. Behauptung:
Sei U eine Umgebung von x. Dann gibt es eine offene Menge G mit $x \in G \subset U$. Daher gibt es ein $K_\varepsilon(x)$ mit $K_\varepsilon(x) \subset G$ und somit $K_\varepsilon(x) \subset U$. ■

Definition 3.8 *x heißt **innerer Punkt** einer Menge $M \subset X$, wenn M Umgebung von x ist. Die Menge aller inneren Punkte von M heißt das **Innere** von M oder der **offene Kern** von M. Bezeichnung:* $\operatorname{int} M$ *oder M°.*

Wir können daher Satz 3.4 auch so formulieren:

Satz 3.9 *Eine Teilmenge M von X ist genau dann offen, wenn sie nur aus inneren Punkten besteht.*

Es gibt Mengen ohne innere Punkte, z.B.:

1. Die einpunktigen Teilmengen von $\mathbb{R}$ (mit der üblichen Topologie) haben keine inneren Punkte.

2. Allgemeiner haben die abzählbaren Teilmengen von $\mathbb{R}$ keine inneren Punkte.

   Beweis: Sei A eine abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$. Angenommen, x ist ein innerer Punkt von A. Dann gibt es eine offene Menge G, sodass $x \in G \subset A$. Das heißt, es gibt ein $\varepsilon > 0$, sodass $K_\varepsilon(x) \subset G \subset A$.

   Hier ist $K_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Das ist aber bekanntlich eine überabzählbare Menge, und es ergibt sich ein Widerspruch zur Abzählbarkeit von A. ■

3. $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ ist eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ ohne innere Punkte (bezüglich der üblichen Topologie).

   Beweis: Übungsaufgabe.

Satz 3.10 int M *ist offen, und zwar ist es die größte in M enthaltene offene Menge.*

Beweis: Sei G eine in M enthaltene offene Menge.
$x \in G \Rightarrow x \in G \subset M \Rightarrow x \in \operatorname{int} M$,
also ist $G \subset \operatorname{int} M$ und es folgt: $\bigcup\limits_{G \text{ offen } \subset M} G \subset \operatorname{int} M$.
Es gilt aber auch die umgekehrte Inklusion:
$x \in \operatorname{int} M \Rightarrow \exists$ offene Menge $G_x : x \in G_x \subset M \Rightarrow x \in \bigcup\limits_{G \text{ offen } \subset M} G$.
Es gilt also

$$\operatorname{int} M = \bigcup_{G \text{ offen } \subset M} G,$$

und das ist eine Vereinigung von offenen Mengen und somit selbst eine offene Menge. ■

Satz 3.11 *Seien τ_1 und τ_2 zwei Topologien auf X. Dann gilt:*
$\tau_1 \subset \tau_2 \Leftrightarrow \mathcal{U}_1(x) \subset \mathcal{U}_2(x)$ *für alle* $x \in X$,
wobei $\mathcal{U}_i(x)$ *die Menge der Umgebungen von x bezüglich τ_i bezeichnet.*

Definition 3.12 *In diesem Fall heißt τ_2* ***feiner*** *als τ_1 (oder τ_1* ***gröber*** *als τ_2). Wenn außerdem $\tau_1 \neq \tau_2$ ist, so heißt τ_2* ***echt feiner*** *als τ_1 (oder τ_1* ***echt gröber*** *als τ_2).*

Beispiel 3.13 *Die diskrete Topologie auf X ist feiner als jede andere Topologie auf X. Die indiskrete Topologie auf X ist gröber als jede andere Topologie auf X.*

Beweis des Satzes:
a) Sei $\tau_1 \subset \tau_2$.
Wenn $U \in \mathcal{U}_1(x)$, dann gibt es ein $G \in \tau_1$, sodass $x \in G \subset U$.
Wegen $\tau_1 \subset \tau_2$ ist aber G auch $\in \tau_2$ und somit $U \in \mathcal{U}_2(x)$.

b) Sei $\mathcal{U}_1(x) \subset \mathcal{U}_2(x)$ für alle $x \in X$.
Wenn $G \in \tau_1$, dann ist $G \in \mathcal{U}_1(x)$ für alle $x \in G$ (nach Bemerkung 3.3).
Nach Voraussetzung gilt daher auch $G \in \mathcal{U}_2(x)$ für alle $x \in G$, und nach Satz 3.9 folgt $G \in \tau_2$. ■

Folgerung 3.14 *Zwei Topologien sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Umgebungen liefern. (Das heißt, eine Topologie ist durch die zugehörigen Umgebungen eindeutig festgelegt.)*

Definition 3.15 *Zwei Metriken d und d' auf einer Menge X heißen* ***(topologisch) äquivalent****, wenn $\tau_d = \tau_{d'}$.*

Beispiel 3.16 *Die euklidische Metrik, die Summenmetrik und die Maximumsmetrik im $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent. Die zugehörige Topologie nennen wir die* ***übliche Topologie*** *des $\mathbb{R}^n$ (Bezeichnung: τ_u).*

Beweis: Übungsaufgabe (unter Benützung obiger Folgerung).

Beispiel 3.17 *Die Metrik auf $\mathbb{R}^n$, welche die diskrete Topologie erzeugt, ist nicht äquivalent zur euklidischen Metrik. Die diskrete Topologie auf $\mathbb{R}^n$ ist also echt feiner als die übliche Topologie.*

Beweis: $\{x\}$ ist bezüglich der diskreten Topologie eine Umgebung von x, aber nicht bezüglich der euklidischen Metrik. ■

Beispiel 3.18 *Die folgende Halbmetrik liefert eine Topologie auf dem $\mathbb{R}^n$, welche echt gröber als die übliche Topologie ist: $d(x, y) := |x_1 - y_1|$.*

Beweis: Übungsaufgabe (vgl. Beispiel 7 in Kapitel 1).

Kapitel 4

Berührungspunkte und abgeschlossene Mengen

Definition 4.1 *$x \in X$ heißt **Berührungspunkt** von $M \subset X$, wenn $U \cap M \neq \emptyset$ für alle Umgebungen U von x.*

Definition 4.2 *Die Menge aller Berührungspunkte von M heißt **(abgeschlossene) Hülle** oder **Abschluss** von M. Bezeichnung: $\overline{M}$ oder $\operatorname{cl} M$.*

Bemerkung 4.3 *Für jede Teilmenge M von X gilt $M \subset \overline{M}$.*

Beweis: x ist ein Element jeder Umgebung U von x, daher ist $x \in U \cap M$ und somit $U \cap M \neq \emptyset$ für alle $x \in M$. ■

Definition 4.4 *M heißt **abgeschlossen**, wenn $M = \overline{M}$.*

Anders ausgedrückt: Eine Menge M ist genau dann abgeschlossen, wenn jeder Berührungspunkt von M ein Element von M ist.

Beispiel 4.5 *Sei $X = \{1, 2\}$ mit der Topologie $\tau = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$, und $M = \{1\}$. Dann ist 2 ein Berührungspunkt von M und somit $\overline{M} = X$.*

Beweis: Sei U eine Umgebung von 2. Dann gibt es ein $G \in \tau$ mit $2 \in G \subset U$. Also muss $G = U = \{1, 2\}$ sein, und wir sehen: $U \cap M = \{1\} \neq \emptyset$. ■

Beispiel 4.6 *0 ist ein Berührungspunkt des halboffenen Intervalls $(0, 1]$, und $\overline{(0, 1]} = [0, 1]$.*

Satz 4.7 *Eine Teilmenge von X ist genau dann abgeschlossen, wenn ihr Komplement offen ist.*

Beweis:
1) Sei M abgeschlossen, also $M = \overline{M}$, und $x \in X \backslash M = X \backslash \overline{M}$. Das heißt, x ist nicht Berührungspunkt von M. Daher gibt es eine Umgebung U von x mit $U \cap M = \emptyset$, also $U \subset X \backslash M$. Folglich ist $X \backslash M$ Umgebung von jedem seiner Elemente und somit offen.
2) Sei $X \backslash M$ offen. Angenommen, $M \neq \overline{M}$. Dann gibt es ein $x \in \overline{M}$ mit $x \notin M$, also $x \in X \backslash M$.
Da $X \backslash M$ offen ist, ist es eine Umgebung von x. Diese Umgebung hat mit M leeren Durchschnitt, also kann x kein Berührungspunkt von M sein. Das ergibt einen im Widerspruch zu $x \in \overline{M}$. ■

Beispiel 4.8 *$\emptyset$ und X sind stets offen und daher zugleich abgeschlossen.*

Beispiel 4.9 *In der diskreten Topologie ist jede Teilmenge offen und zugleich abgeschlossen.*

Folgerung 4.10 *Der Durchschnitt von beliebig vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.*

Beweis: Seien A_i abgeschlossene Mengen für alle $i \in I$. Dann ist
$X \backslash \bigcap\limits_{i \in I} A_i = \bigcup\limits_{i \in I} (X \backslash A_i)$ offen, also $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ abgeschlossen. ■

Folgerung 4.11 *Die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.*

Beweis: Seien $A_1, \ldots, A_n$ abgeschlossen. Dann ist $X \backslash \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \bigcap\limits_{i=1}^{n} (X \backslash A_i)$ offen, also $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ abgeschlossen. ■

Satz 4.12 *Für jede Teilmenge M von X ist $\overline{M}$ abgeschlossen, und zwar ist $\overline{M}$ die kleinste M enthaltende abgeschlossene Teilmenge von X.*

Beweis: Sei $M \subset X$.

a) $\overline{M}$ ist abgeschlossen:

Für jedes $x \in X \backslash \overline{M}$ gibt es eine Umgebung U von x mit $U \cap M = \emptyset$, also $U \subset X \backslash M$. Daher ist x innerer Punkt von $X \backslash M$.

Wenn umgekehrt x ein innerer Punkt von $X \backslash M$ ist, dann ist $X \backslash M$ eine Umgebung von x. Da $(X \backslash M) \cap M = \emptyset$, folgt: x ist nicht Berührungspunkt von M, also $x \in X \backslash \overline{M}$.

Wir sehen also: $X \backslash \overline{M} = \operatorname{int}(X \backslash M)$, und das ist eine offene Menge. Somit folgt, dass $\overline{M}$ abgeschlossen ist.

b) Für jede M enthaltende abgeschlossene Teilmenge A von X gilt $\overline{M} \subset A$.

Sei A eine abgeschlossene Teilmenge von X mit $M \subset A$. Dann ist $X \backslash A \subset X \backslash M$. Da $X \backslash A$ offen ist, folgt nach Satz 3.10 $X \backslash A \subset \operatorname{int}(X \backslash M) = X \backslash \overline{M}$, also $\overline{M} \subset A$. ■

Definition 4.13 *Eine Teilmenge D von X heißt* ***dicht*** *in X, wenn $\overline{D} = X$ ist.*

Beispiel 4.14 $\mathbb{Q}$ *ist dicht in* $\mathbb{R}$.

Beweis: Sei U eine Umgebung von $x \in \mathbb{R}$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U$. In jedem solchen Intervall liegt bekanntlich mindestens eine rationale Zahl, also ist $U \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. ■

Beispiel 4.15 *Sei P die Menge aller Polynomfunktionen $[a, b] \to \mathbb{R}$. Dann ist P dicht in $\mathcal{C}[a, b]$ (bezüglich der Supremumsmetrik, vgl. Beispiel 6 in Kapitel 1.)*

Beweis: Das ist die Aussage des bekannten Approximationssatzes von Weierstraß. ■

Definition 4.16 *X heißt* ***separabel****, wenn es in X eine abzählbare dichte Menge gibt.*

Beispiel 4.17 $\mathbb{R}$ *ist separabel, da* $\mathbb{Q}$ *abzählbar und dicht ist. Analog ergibt sich, dass* $\mathbb{R}^n$ *separabel ist.*

Beispiel 4.18 *Auch $\mathcal{C}[a, b]$ ist separabel, denn die Menge aller Polynomfunktionen auf $[a, b]$ mit rationalen Koeffizienten ist abzählbar und dicht in $\mathcal{C}[a, b]$.*

Der folgende Begriff ist verwandt mit dem Begriff "Berührungspunkt", aber nicht äquivalent dazu:

Definition 4.19 *$x \in X$ heißt **Häufungspunkt** von $M \subset X$, wenn in jeder Umgebung von x ein von x verschiedener Punkt aus M liegt.*

Bemerkung 4.20 *Jeder Häufungspunkt von M ist ein Berührungspunkt von M. Davon gilt aber nicht die Umkehrung.*

Definition 4.21 *Ein Berührungspunkt von M, der kein Häufungspunkt ist, heißt **isolierter Punkt** von M.*

Wenn x ein isolierter Punkt von M ist, dann ist also $x \in M$, und es gibt eine Umgebung von x, sodass $U \cap M = \{x\}$.

Beispiel 4.22 *Sei $M = [0, 1) \cup \{2\}$ in $\mathbb{R}$. Dann ist z.B. 1 ein Häufungspunkt und 2 ein isolierter Punkt von M. Alle Punkte von $[0, 1)$ sind ebenfalls Häufungspunkte von M.*

Beispiel 4.23 *Die Menge $\bigcup_{n=2}^{\infty}\{\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}\}$ besitzt (bezüglich der üblichen Topologie von $\mathbb{R}$) genau zwei Häufungspunkte, nämlich 0 und 1. Alle Elemente dieser Menge sind isolierte Punkte.*

Definition 4.24 *Wenn x Berührungspunkt von M und $X \backslash M$ ist, dann heißt x **Randpunkt** von M. Die Menge aller Randpunkte von M heißt der **Rand** von M. Bezeichnung:* $\operatorname{bd} M$ *oder* ∂M.

Also: $\operatorname{bd} M = \overline{M} \cap \overline{X \backslash M}$.

Beispiel 4.25 *Die vorhin betrachtete Menge $[0, 1) \cup \{2\}$ besitzt genau 3 Randpunkte, nämlich 0, 1 und 2.*

Kapitel 5

Topologische Teilräume

Wir betrachten zunächst einen metrischen Raum (X, d). Jede Teilmenge Y von X wird mit der Restriktion $d' := d|_{Y \times Y}$ in natürlicher Weise auch zu einem metrischen Raum. Wir nennen (Y, d') dann einen **(metrischen) Teilraum** von (X, d).

Satz 5.1 *Sei (Y, d') ein Teilraum von (X, d). Dann sind die offenen Mengen von (Y, d') genau die Mengen der Gestalt $G \cap Y$, wobei G eine beliebige offene Menge von (X, d) ist.*

Beweis:
1) Sei G offen in (X, d). Dann gibt es zu jedem $x \in G$ ein $\varepsilon_x > 0$, sodass $K_{\varepsilon_x}(x) \subset G$. Dabei bezeichnet $K_{\varepsilon_x}(x)$ eine Kugel bezüglich der Metrik d.
Sei nun $x \in G \cap Y$. Dann ist $K'_{\varepsilon_x}(x) := \{y \in Y : d'(x, y) < \varepsilon_x\} = K_{\varepsilon_x}(x) \cap Y \subset G \cap Y$. Somit ist $G \cap Y$ offen in (Y, d').
2) Sei umgekehrt G' eine beliebige offene Menge in (Y, d'). Dann gibt es zu jedem $x \in G'$ ein $\varepsilon_x > 0$, sodass $K'_{\varepsilon_x}(x) \subset G'$.
Sei nun $G := \bigcup_{x \in G'} K_{\varepsilon_x}(x)$. Das ist eine offene Menge in (X, d), und
$G \cap Y = \bigcup_{x \in G'} (K_{\varepsilon_x}(x) \cap Y) = \bigcup_{x \in G'} K'_{\varepsilon_x}(x) = G'$. ■
Das führt zu:

Definition 5.2 *Seien (Y, σ) und (X, τ) topologische Räume. (Y, σ) heißt* ***(topologischer) Teilraum*** *von (X, τ), wenn $Y \subset X$ und $\sigma = \{G \cap Y : G \in \tau\}$.*

Bemerkung 5.3 *Wenn (X, τ) ein topologischer Raum ist, so kann jede Teilmenge Y von X durch die Definition $\sigma := \{G \cap Y : G \in \tau\}$ zu einem Teilraum gemacht werden.*

Beweis: Es ist zu zeigen, dass das so definierte σ wirklich eine Topologie auf Y ist.
1. $Y \in \sigma$, da $Y = X \cap Y$ und $X \in \tau$.
$\emptyset \in \sigma$, da $\emptyset = \emptyset \cap Y$.
2. $\bigcup_{i \in I}(G_i \cap Y) = \left(\bigcup_{i \in I} G_i\right) \cap Y$, und $\bigcup_{i \in I} G_i \in \tau$.
3. $\bigcap_{i=1}^{n}(G_i \cap Y) = \left(\bigcap_{i=1}^{n} G_i\right) \cap Y$, und $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \tau$. ■

Definition 5.4 *Die Topologie $\sigma = \{G \cap Y : G \in \tau\}$ heißt auch die* ***Spurtopologie*** *von Y.*

Nach dieser Definition ist eine Teilmenge M von Y genau dann offen, wenn es eine offene Menge $G \in \tau$ gibt, sodass $M = G \cap Y$. Das gilt analog auch für abgeschlossene Mengen:

Bemerkung 5.5 *Sei (Y, σ) ein Teilraum von (X, τ). Eine Teilmenge M von Y ist genau dann abgeschlossen bezüglich σ, wenn es eine abgeschlossene Menge A von X (bezüglich τ) gibt, sodass $M = A \cap Y$.*

Beweis:
1) Sei M abgeschlossen bezüglich σ. Dann ist $Y \backslash M$ σ-offen, also gibt es ein $G \in \tau$, sodass $Y \backslash M = G \cap Y$. Sei nun $A := X \backslash G$. Dann ist $M = A \cap Y$.
2) Wenn $M = A \cap Y$ mit einer τ-abgeschlossenen Menge A, dann ist $X \backslash A \in \tau$. Also ist $Y \backslash (A \cap Y) = Y \backslash A = Y \cap (X \backslash A)$ σ-offen und daher $A \cap Y$ σ-abgeschlossen. ■
Auch für Umgebungen gilt eine analoge Aussage:

Bemerkung 5.6 *V ist genau dann eine σ-Umgebung von $x \in Y$, wenn es eine τ-Umgebung U von x gibt, sodass $V = U \cap Y$.*

Beweis: Übungsaufgabe.

Beispiel 5.7 *Sei $Y = [0,1] \cup (2,3)$ und $X = \mathbb{R}$ mit der üblichen Topologie τ_u.*
$[0,1]$ ist σ-offen (da z.B. $[0,1] = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \cap Y$), aber natürlich nicht τ_u-offen.
$(2,3)$ ist σ-abgeschlossen (da z.B. $(2,3) = [2,3] \cap Y$), aber natürlich nicht τ_u-abgeschlossen.

Beispiel 5.8 *Sei $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \subset X$ und $M := \{(x,0) : 0 < x < 1\} \subset Y$. Dann ist M σ-offen, aber weder τ_u-offen noch τ_u-abgeschlossen. (Hier bezeichnet τ_u natürlich die übliche Topologie im $\mathbb{R}^2$ und σ die Spurtopologie von Y.)*

Beweis: $M \in \sigma$, da z.B. $M = K_{\frac{1}{2}}\left((\frac{1}{2}, 0)\right) \cap Y$.

$M \notin \tau_u$, da M keine τ_u-inneren Punkte enthält.

M ist nicht τ_u-abgeschlossen, denn z.B. ist $(0,0)$ ein Berührungspunkt von M, der nicht Element von M ist. ■

5.1 Das Cantor'sche Diskontinuum

Im Folgenden lernen wir ein interessantes Beispiel einer abgeschlossenen Teilmenge des Einheitsintervalls $[0,1]$ kennen, das sogenannte Cantor'sche Diskontinuum. Diese Menge erhält man dadurch, dass man zunächst vom Einheitsintervall das mittlere offene Drittel, also $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, weglässt, sodass $[0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ übrig bleibt. Von jedem dieser beiden Intervalle lassen wir nun wieder das mittlere offene Drittel weg, usw. Setzt man das unendlich lang fort, dann bleibt nur sehr wenig vom Einheitsintervall übrig. Dieses Wenige nennt man das Cantor'sche Diskontinuum, und wir bezeichnen es mit C. Obwohl C nur "sehr wenig" ist, enthält C überabzählbar viele Punkte, und es ist sogar jeder Punkt von C Häufungspunkt, es gibt also keine isolierten Punkte. Andererseits ist das Komplement von C dicht in $[0,1]$.

Etwas genauer kann man C folgenderweise beschreiben:

Für ein beliebiges abgeschlossenes Intervall $J = [a,b]$ definieren wir das linke, mittlere und rechte Drittel von J so:

$$\ell(J) := [a, a + \frac{b-a}{3}], \quad m(J) := (a + \frac{b-a}{3}, a + 2\frac{b-a}{3}), \quad r(J) := [a + 2\frac{b-a}{3}, b].$$

Sei $I := [0,1]$. Wir setzen

$A_0 := \ell(I), \quad A_1 := r(I),$

$A_{00} := \ell(A_0), \quad A_{01} := r(A_0), \quad A_{10} := \ell(A_1), \quad A_{11} := r(A_1)$ usw.

Die rekursive Definition lautet also:

$A_{i_1,\dots,i_n,0} := \ell(A_{i_1,\dots,i_n}), \quad A_{i_1,\dots,i_n,1} := r(A_{i_1,\dots,i_n}).$

Offensichtlich ist jedes $A_{i_1,\dots,i_n}$ ein Intervall der Länge $\frac{1}{3^n}$, und für festes n sind alle diese Intervalle paarweise disjunkt.

Sei nun für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$B_n := \bigcup_{(i_1,\dots,i_n) \in \{0,1\}^n} A_{i_1,\dots,i_n}.$$

Dann gilt klarerweise $B_{n+1} \subset B_n$ für alle n.

Definition 5.9 $C := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ *(mit obigen Mengen B_n) heißt das* ***Cantor'sche Diskontinuum.***

Im Folgenden überlegen wir uns einige wesentliche Eigenschaften von C.

Bemerkung 5.10 *C ist abgeschlossen, denn alle $A_{i_1,\ldots,i_n}$ sind abgeschlossen.*

(Siehe Folgerungen 4.11 und 4.10.)

Bemerkung 5.11 *Sei $C_1 := \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{bd} B_n$. Dann gilt:*
1) $C_1 \subset C$,
2) C_1 ist abzählbar unendlich.

Beweis:
1) $\operatorname{bd} B_n \subset \operatorname{bd} B_{n+1}$, denn
$\operatorname{bd} A_{i_1,\ldots,i_n} \subset \operatorname{bd}(\ell(A_{i_1,\ldots,i_n}) \cup r(A_{i_1,\ldots,i_n})) \subset \operatorname{bd} B_{n+1}$.
Es folgt $\operatorname{bd} B_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = C$ und daher $C_1 \subset C$.
2) $\operatorname{card}(\operatorname{bd} A_{i_1,\ldots,i_n}) = 2 \Rightarrow \operatorname{card}(\operatorname{bd} B_n) = 2^n$, denn die Mengen $A_{i_1,\ldots,i_n}$ sind für festes n paarweise disjunkte Intervalle.
Es folgt: C_1 ist abzählbar unendlich. ■

Bemerkung 5.12 *Jeder Punkt von C ist Häufungspunkt von C, ja sogar von C_1. Daher enthält C keine isolierten Punkte.*

Beweis: Sei $x \in C$ und $\varepsilon > 0$. Es gibt jedenfalls ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$.
$C \subset B_n \Rightarrow x \in B_n \Rightarrow \exists i_1, \ldots, i_n \in \{0,1\} : x \in A_{i_1,\ldots,i_n}$.
Seien u und v die Endpunkte von $A_{i_1,\ldots,i_n}$ mit $u < v$, also $A_{i_1,\ldots,i_n} = [u,v]$.
Wegen $v - u = \frac{1}{3^n} < \varepsilon$ ist $|x-u| < \varepsilon$ und $|x-v| < \varepsilon$.
$\{u,v\} \in C_1$, also folgt $\{u,v\} \subset K_\varepsilon(x) \cap C_1$, somit $(K_\varepsilon(x) \backslash \{x\}) \cap C_1 \neq \emptyset$. ■

Bemerkung 5.13 *$I \backslash C$ ist dicht in I.*

Beweis: Wir betrachten hier I als Teilraum von $\mathbb{R}$ (mit der üblichen Topologie).

Es ist zu zeigen, dass jedes Element von I Berührungspunkt von $I \backslash C$ ist. Für die Elemente von $I \backslash C$ ist das trivial (siehe Bemerkung 4.3). Betrachten wir also ein $x \in C$.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, und $n \in \mathbb{N}$ wieder so, dass $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$.

Dann folgt wie vorhin: $\exists i_1, \ldots, i_n \in \{0, 1\} : x \in A_{i_1,\ldots,i_n}$.

Sei nun $y \in m(A_{i_1,\ldots,i_n})$. Dann ist $|x - y| < \varepsilon$, da $A_{i_1,\ldots,i_n}$ ein Intervall der Länge $\frac{1}{3^n}$ ist.

$y \in I \backslash C$, also folgt $K_\varepsilon(x) \cap (I \backslash C) \neq \emptyset$. Es folgt: x ist ein Berührungspunkt von $I \backslash C$. ■

Bemerkung 5.14 *C ist nicht abzählbar.*

(C enthält also "viel mehr" Punkte als C_1 !)

Beweis: Jedem $x \in C$ ist nach Obigem ein Folge $(i_1, i_2, \ldots) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ zugeordnet, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $x \in A_{i_1,\ldots,i_n}$. Diese Zuordnung ist bijektiv, denn für jede solche Folge ist $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{i_1,\ldots,i_n}$ ein Punkt. (Es handelt sich ja um eine Intervallschachtelung!)

Es folgt: C ist gleichmächtig mit $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, und das ist bekanntlich überabzählbar (2. Cantor'sches Diagonalverfahren). Genauer: Die Mächtigkeit von C stimmt mit der Mächtigkeit des "Kontinuums" $[0, 1]$ bzw. $\mathbb{R}$ überein. ■

Bemerkung 5.15 *Man kann C auch so beschreiben:*
$C = \{x \in I : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ *mit* $a_n \in \{0, 2\}\}$.

Im Gegensatz zur üblichen Konvention bei der b-adischen Entwicklung sind hier auch periodische Entwicklungen erlaubt, bei denen ab einem bestimmten Index alle $a_n = 2$ sind (also z.B. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{1}{9}$), obwohl solche Zahlen auch mit einem $a_n = 1$ geschrieben werden können.

Kapitel 6

Umgebungsbasen

Definition 6.1 *Eine Menge $\mathcal{V}(x)$ von Umgebungen von x heißt* ***Umgebungsbasis*** *von x, wenn es zu jeder Umgebung U von x ein $V \in \mathcal{V}(x)$ gibt, sodass $V \subset U$.*

Beispiel 6.2 *Die Gesamtheit aller offenen Mengen, welche x enthalten, ist eine Umgebungsbasis von x.*

(Siehe Definition 3.1.)

Beispiel 6.3 *In einem metrischen Raum bilden die ε-Kugeln um x eine Umgebungsbasis von x.*

Beweis: Jede Umgebung U von x enthält eine offene Menge G mit $x \in G$. Dann gibt es (nach Definition 1.5) eine ε-Kugel $K_\varepsilon(x)$ mit $K_\varepsilon(x) \subset G \subset U$. ■

Oft kann man sich auf Umgebungsbasen beschränken, anstatt alle Umgebungen zu betrachten, z.B.:

Satz 6.4 *x ist genau dann Berührungspunkt von M, wenn $V \cap M \neq \emptyset$ für alle V aus einer Umgebungsbasis von x.*

Beweis: Sei $\mathcal{V}(x)$ eine Umgebungsbasis von x, und $V \cap M \neq \emptyset$ für alle $V \in \mathcal{V}(x)$. Wenn nun U_0 eine beliebige Umgebung von x ist, dann gibt es ein $V_0 \in \mathcal{V}(x)$ mit $V_0 \subset U_0$. Dann ist $V_0 \cap M \neq \emptyset$ und daher auch $U_0 \cap M \neq \emptyset$. Es folgt: x ist ein Berührungspunkt von M.

Die Umkehrung ist trivial. ■

Kapitel 7

Stetigkeit

Betrachten wir zunächst metrische Räume (X, d) und (Y, d'). Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt bekanntlich stetig in $x \in X$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass aus $d(x, z) < \delta$ folgt $d'(f(x), f(z)) < \varepsilon$. (Siehe Vorlesungen aus Analysis.)
Wir können das auch so ausdrücken:

$$f(K_\delta(x)) \subset K_\varepsilon(f(x)).$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$K_\delta(x) \subset f^{-1}(K_\varepsilon(f(x))).$$

f^{-1} bezeichnet hier nicht die (vielleicht gar nicht existierende) Umkehrfunktion von f, sondern das f-*Urbild*. Allgemein ist das f-Urbild einer Teilmenge S von Y so definiert: $f^{-1}(S) := \{x \in X : f(x) \in S\}$. (Siehe Vorlesung "Diskrete Mathematik".)
Da die Kugeln Umgebungsbasen bilden, sehen wir: f ist genau dann stetig in x, wenn das f-Urbild jeder Umgebung von $f(x)$ eine Umgebung von x ist.
Genauer:
1) Sei f stetig in x und U eine Umgebung von $f(x)$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $K_\varepsilon(f(x)) \subset U$. Nach Obigem gibt es dann ein $\delta > 0$ mit $K_\delta(x) \subset f^{-1}(K_\varepsilon(f(x))) \subset f^{-1}(U)$, und daher ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x.
2) Angenommen, das f-Urbild jeder Umgebung von $f(x)$ ist eine Umgebung von x. Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $f^{-1}(K_\varepsilon(f(x)))$ eine Umgebung von x, und daher gibt es eine δ-Kugel $K_\delta(x)$ mit $K_\delta(x) \subset f^{-1}(K_\varepsilon(f(x)))$.
Das führt nun zu folgender Definition der Stetigkeit in beliebigen topologischen Räumen:

Definition 7.1 *Seien (X, τ) und (Y, σ) topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt* ***stetig in*** *$x \in X$, wenn das Urbild jeder Umgebung von $f(x)$ eine Umgebung von x ist. ("Lokale" Definition der Stetigkeit.)*

Bemerkung 7.2 *Wenn wir die Topologien betonen wollen, auf die sich die Stetigkeit bezieht, sagen wir auch: f ist (τ, σ)-**stetig**.*

Bemerkung 7.3 *Wie bei metrischen Räumen, kann man sich auch allgemein auf Umgebungsbasen beschränken. Wenn also $\mathcal{V}(x)$ und $\mathcal{V}'(f(x))$ Umgebungsbasen von x bzw. $f(x)$ sind, dann gilt: f ist genau dann stetig in x, wenn*
$\forall\ V' \in \mathcal{V}'(f(x))\ \exists\ V \in \mathcal{V}(x) : f(V) \subset V'$
(oder, äquivalent dazu, $V \subset f^{-1}(V')$).

Beweis: analog zu metrischen Räumen, siehe oben. ■
An der Stetigkeit einer Funktion $f : X \to Y$ ändert sich nichts, wenn man den Wertebereich Y auf die Menge $f(X)$ aller Funktionswerte einschränkt:

Bemerkung 7.4 *$f : X \to Y$ ist genau dann stetig in x, wenn $f : X \to f(X)$ stetig in x ist.*

Dabei ist natürlich gemeint, dass man $f(X)$ als topologischen Teilraum von Y betrachtet.
Beweis: Sei $f : X \to Y$ stetig in x und U' eine Umgebung von $f(x)$ in der Teilraumtopologie von $f(X)$. Dann gibt es eine Umgebung U von $f(x)$ in Y, sodass $U' = U \cap f(X)$ (siehe Bemerkung 5.6). Es folgt $f^{-1}(U') = f^{-1}(U) \cap X = f^{-1}(U)$ ist eine Umgebung von x.
Die Umkehrung ist genau so leicht einzusehen. ■

Definition 7.5 *$f : X \to Y$ heißt **stetig**, wenn f in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist. ("Globale" Definition der Stetigkeit.)*

Beispiel 7.6 *Seien (X, d) und (X', d') (halb)metrische Räume und $f : X \to X'$ eine Abbildung. Wenn es eine Konstante K gibt, sodass*

$$d'(f(x), f(y)) \leq K \cdot d(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in X \qquad (\text{"Lipschitz-Bedingung"}),$$

dann ist f stetig.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ und $x \in X$. Wir wählen $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$ und sehen:
$d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) \leq K \cdot d(x, y) < K \cdot \delta = \varepsilon$. ■

Beispiel 7.7 *Jede lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist stetig.*

Beweis: Sei $f : x \mapsto Ax$ mit einer $(m \times n)$-Matrix so eine Abbildung. Wir zeigen, dass sie eine Lipschitz-Bedingung erfüllt.
$d(Ax, Ay)^2 = \|Ax - Ay\|^2 = \|A(x-y)\|^2 =$
$= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{1k}(x_k - y_k)\right)^2 + \ldots + \left(\sum_{k=1}^{n} a_{mk}(x_k - y_k)\right)^2 \leq$
$\leq \sum_{k=1}^{n} a_{1k}^2 \sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2 + \ldots + \sum_{k=1}^{n} a_{mk}^2 \sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2$ (nach der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung)
$= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{1k}^2 + \ldots + \sum_{k=1}^{n} a_{nk}^2\right) \|x - y\|^2$. ■

Beispiel 7.8 *Sei (X, d) ein halbmetrischer Raum und S eine (feste) nicht-leere Teilmenge von X. Für $x \in X$ sei*

$$d(x, S) := \inf\{d(x, s) : s \in S\}.$$

Dann ist die Abbildung $X \to \mathbb{R} : x \mapsto d(x, S)$ stetig.

Beweis: Übungsaufgabe.

Satz 7.9 *Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetig. Dann ist auch die Zusammensetzung $g \circ f : X \to Z$ stetig. (Das gilt sowohl lokal als auch global.)*

Beweis: Sei $x \in X$ und U'' eine Umgebung von $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Wegen der Stetigkeit von g ist dann $g^{-1}(U'')$ eine Umgebung von $f(x)$, und wegen der Stetigkeit von f ist $f^{-1}(g^{-1}(U''))$ eine Umgebung von x. Das ist aber dasselbe wie $(g \circ f)^{-1}(U'')$. ■

Satz 7.10 *Sei $f : X \to Y$ stetig und $S \subset X$. Dann ist die Restriktion $f|_S : S \to Y$ stetig bezüglich der Teilraumtopologie von S.*

Beweis: Sei $x \in S$ und U' eine Umgebung von $f(x)$. Dann ist $f^{-1}(U')$ eine Umgebung von x in X und daher $f^{-1}(U') \cap S = f|_S^{-1}(U')$ eine Umgebung von x in S. ■

Aus der Stetigkeit von Restriktionen kann man jedoch im Allgemeinen nicht auf die Stetigkeit einer Funktion schließen, wie das folgende Bespiel zeigt:

Beispiel 7.11 *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so definiert: $f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$ Dann sind $f|_{\mathbb{Q}}$ und $f|_{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}$ stetig, aber f ist nirgends stetig.*

Beweis: Übungsaufgabe.

Wenn die Teilmengen, auf die f eingeschränkt wird, offen sind, dann ist so ein Schluss jedoch schon möglich:

Satz 7.12 *Sei $(G_i)_{i\in I}$ eine Familie offener Teilmengen von X, sodass $\bigcup\limits_{i\in I} G_i = X$. Dann gilt: $f : X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn alle Restriktionen $f|_{G_i}$ stetig sind.*

Beweis:

1) Wenn f stetig ist, dann sind alle $f|_{G_i}$ stetig (nach dem vorigen Satz).

2) Sei $x \in X$ und U' eine Umgebung von $f(x)$. Nach Voraussetzung gibt es ein $i \in I$ mit $x \in G_i$.

$f|_{G_i}$ ist stetig, also gibt es eine Umgebung U von x (bezüglich der Topologie von X), sodass $f(U \cap G_i) \subset U'$. Da G_i offen ist, ist $U \cap G_i$ auch eine Umgebung von x, und es folgt: f ist stetig in x. ■

Der folgende Satz stellt ein wichtiges Kriterium für die Stetigkeit dar:

Satz 7.13 *Seien X und Y topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Die folgenden Bedingungen sind gleichwertig:*

a) f ist stetig.

b) Für jede Teilmenge M von X gilt: $f(\overline{M}) \subset \overline{f(M)}$.

c) Das f-Urbild jeder abgeschlossenen Menge ist abgeschlossen.

d) Das f-Urbild jeder offenen Menge ist offen.

Beweis:

a) $\Rightarrow$ *b)* :

Sei f stetig und $x \in \overline{M}$. Es ist zu zeigen, dass dann $f(x) \in \overline{f(M)}$ ist.

Sei U eine Umgebung von $f(x)$. Dann ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x.

$x \in \overline{M} \Rightarrow f^{-1}(U) \cap M \neq \emptyset$, also gibt es ein Element y von $f^{-1}(U) \cap M$.

Dann ist $f(y) \in U \cap f(M)$ und somit $U \cap f(M) \neq \emptyset$. Es folgt: $f(x) \in \overline{f(M)}$.

b) $\Rightarrow$ *c)* :

Sei A eine abgeschlossene Teilmenge von Y, und $M := f^{-1}(A)$.

Nach *b)* ist $f(\overline{M}) \subset \overline{f(M)}$, und das ist $\subset A$, da $f(M) \subset A$ und A abgeschlossen.

Es folgt: $\overline{M} \subset f^{-1}(A) = M$, also $\overline{M} = M$ und somit M abgeschlossen.

c) $\Rightarrow$ *d)* :

Sei G eine offene Teilmenge von Y. Dann ist $Y \backslash G$ abgeschlossen und daher ist nach c) auch $f^{-1}(Y \backslash G)$ abgeschlossen.

Nun ist aber $f^{-1}(Y \backslash G) = X \backslash f^{-1}(G)$, also folgt: $f^{-1}(G)$ ist offen.

$d) \Rightarrow a)$:

Sei $x \in X$ und U Umgebung von $f(x)$. Dann gibt es eine offene Menge G, sodass $f(x) \in G \subset U$.

Nach d) ist $f^{-1}(G)$ offen. Wegen $x \in f^{-1}(G) \subset f^{-1}(U)$ ist daher $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x, und es folgt: f ist stetig in x. ■

Auf Grund dieses Satzes kann man das folgende Analogon von Satz 7.12 für abgeschlossene Mengen beweisen:

Satz 7.14 *Seien $A_1, \ldots, A_n$ abgeschlossene Teilmengen von X, sodass $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$. Dann gilt: $f : X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn alle Restriktionen $f|_{A_i}$ stetig sind.*

Beweis: Übungsaufgabe.

Definition 7.15 *Eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ heißt **Homöomorphismus**, wenn f und f^{-1} stetig sind.*

Definition 7.16 *Wenn es einen Homöomorphismus $f : X \to Y$ gibt, so heißen X und Y **homöomorph**.*

Satz 7.17 *Seien (X, τ) und (Y, σ) topologische Räume. Eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann ein Homöomorphismus, wenn die zugehörige Abbildung $f_* : \tau \to \sigma : G \longmapsto f(G)$ wohldefiniert und bijektiv ist.*

("wohldefiniert" heißt hier, dass $f(G) \in \sigma$ für jedes $G \in \tau$.)
Beweis:
1) Sei f ein Homöomorphismus. Dann ist f^{-1} stetig, und somit gilt für jedes $G \in \tau$: $(f^{-1})^{-1}(G) = f(G) \in \sigma$. Also ist f_* wohldefiniert.
f_* ist surjektiv: Sei $G' \in \sigma$. Dann ist $G := f^{-1}(G') \in \tau$ und $f(G) = G'$.
f_* ist injektiv: $f(G) = f(H) \Rightarrow f^{-1}(f(G)) = f^{-1}(f(H)) \Rightarrow G = H$.
2) Sei f_* wohldefiniert und bijektiv.
$G \in \tau \Rightarrow f(G) = (f^{-1})^{-1}(G) \in \sigma$, also ist f^{-1} stetig.
$G' \in \sigma \Rightarrow f_*^{-1}(G') = f^{-1}(G') \in \tau$, also ist auch f stetig. ■

Ein Homöomorphismis vermittelt also eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den Topologien der betrachteten Räume. Daher sind diese Räume vom Standpunkt der Topologie aus gewissermaßen "gleich". Wie bereits in der Einleitung erwähnt, befasst sich ja die Topologie mit Eigenschaften, die invariant gegenüber Homöomorphismen sind.

Beispiele für Homöomorphismen:

1. Die identische Abbildung $X \to X$ ist trivialerweise ein Homöomorphismus.

2. Sei $A = (a_{ik})$ eine $n \times n$-Matrix reeller Zahlen mit $\det A \neq 0$. Dann ist die Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \longmapsto Ax$ ein Homöomorphismus.

   Beweis: Die Bijektivität wird in der Linearen Algebra gezeigt: die Umkehrabbildung ist wieder linear und entspricht einfach der inversen Matrix A^{-1}. Da jede lineare Abbildung stetig ist (siehe Beispiel 7.7), sind wir schon fertig. ■

3. Seien (X, d) und (X', d') metrische Räume. Dann ist jede surjektive Isometrie $X \to X'$ ein Homöomorphismus. (Siehe Bemerkung 1.3 und Beispiel 7.6.)

4. Sei $1 \leq m < n$. Dann ist $\mathbb{R}^m$ homöomorph zu dem Teilraum $T_{m,n} := \{(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) : x_i \in \mathbb{R}\}$ des $\mathbb{R}^n$, denn die Abbildung

   $$\mathbb{R}^m \to T_{m,n} : (x_1, \ldots, x_m) \mapsto (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$$

   ist trivialerweise eine surjektive Isometrie. Allgemeiner kann man leicht zeigen, dass jeder m-dimensionale lineare Teilraum des $\mathbb{R}^n$ zum $\mathbb{R}^m$ homöomorph ist.

5. Je zwei abgeschlossene Intervalle $[a, b]$, $[a', b']$ mit $a < b$ und $a' < b'$ sind homöomorph. Es gibt nämlich sogar eine Affinität, die das eine Intervall auf das andere abbildet. (Übungsaufgabe)

6. Analog gilt: Je zwei offene Intervalle (a, b), (a', b') mit $a < b$ und $a' < b'$ sind homöomorph.

7. Die Abbildung $h : \mathbb{R} \to (-1, 1) : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ ist ein Homöomorphismus. (Übungsaufgabe)

Bemerkung 7.18 *Nicht jede stetige bijektive Abbildung ist ein Homöomorphismus.*

Beweis: Hier ist ein einfaches Gegenbeispiel: Sei $X = \{1, 2\}$ mit der diskreten Topologie und $Y = \{3, 4\}$ mit der indiskreten Topologie. Dann ist die Abbildung $f : X \to Y : x \mapsto x + 2$ bijektiv und stetig, aber f^{-1} ist nicht stetig, da z.B. $(f^{-1})^{-1}(\{1\}) = f(\{1\}) = \{3\}$ nicht offen in Y ist. ■
Daraus ergibt sich auch:

Bemerkung 7.19 *Das stetige Bild einer offenen Menge ist im Allgemeinen nicht offen.*

Ein etwas allgemeineres Beispiel dazu: Sei X eine beliebige Menge mit mindestens zwei Elementen, $\tau = \mathcal{P}(X)$ und $\sigma = \{\emptyset, X\}$. Dann ist die identische Abbildung $(X, \tau) \to (X, \sigma) : x \mapsto x$ stetig und bijektiv, aber die Umkehrabbildung ist nicht stetig. Das Bild jeder offenen Teilmenge von X, welche von $\emptyset$ und X verschieden ist, ist nicht offen.

Kapitel 8

Basen von Topologien

Definition 8.1 *Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $\mathcal{B}$ von τ mit $\emptyset \notin \mathcal{B}$ heißt* ***Basis*** *von τ, wenn jede nicht-leere Menge aus τ Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ ist.*

Beispiel 8.2 *In einem (halb)metrischen Raum bilden die ε-Kugeln eine Basis der zugehörigen Topologie.*

Beweis: Sei G eine offene nicht-leere Teilmenge. Dann gibt es zu jedem $x \in G$ eine Kugel $K_{\varepsilon_x}(x) \subset G$. Daher ist

$$G = \bigcup_{x \in G} K_{\varepsilon_x}(x).$$

■

Speziell bilden also die offenen Intervalle eine Basis der üblichen Topologie von $\mathbb{R}$.

Der folgende Satz gibt ein Kriterium dafür an, wann eine Teilmenge der Potenzmenge Basis einer Topologie ist:

Satz 8.3 *Sei $\mathcal{B}$ eine Teilmenge von $\mathcal{P}(X)$ mit folgenden Eigenschaften:*
1) $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$,
2) Wenn B_1, B_2 zwei Mengen aus $\mathcal{B}$ sind und $x \in B_1 \cap B_2$, dann gibt es ein $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.
Dann gibt es genau eine Topologie τ auf X, deren Basis $\mathcal{B}$ ist.

Beweis: Die Eindeutigkeit ist klar, da τ (abgesehen von der leeren Menge) genau aus allen Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{B}$ bestehen muss.

Sei also τ die Menge aller Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{B}$ zusammen mit $\emptyset$. Es ist zu zeigen, dass τ wirklich eine Topologie ist.

Jedenfalls ist $\emptyset \in \tau$, und nach 1) ist auch $X \in \tau$.

Sei nun $G_i \in \tau$ für alle $i \in I$. Dann lässt sich jedes G_i so darstellen: $G_i = \bigcup\limits_{j \in J_i} B_{ij}$ mit $B_{ij} \in \mathcal{B}$ für alle $j \in J_i$. Es folgt: $\bigcup\limits_{i \in I} G_i = \bigcup\limits_{i \in I} \bigcup\limits_{j \in J_i} B_{ij}$, und das ist wieder $\in \tau$.

Jetzt ist noch zu zeigen, dass $G_1 \cap G_2 \in \tau$ ist. Wenn $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, dann ist das trivial. Sonst gibt es ein $x \in G_1 \cap G_2$, und daher gibt es $j_1 \in J_1$ und $j_2 \in J_2$, sodass $x \in B_{1j_1} \cap B_{2j_2}$. Nach 2) gibt es ein $B_x \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_x \subset B_{1j_1} \cap B_{2j_2} \subset G_1 \cap G_2$. Es folgt:

$$G_1 \cap G_2 = \bigcup_{x \in G_1 \cap G_2} B_x$$

und daher $G_1 \cap G_2 \in \tau$. ■

Die Topologie eines (halb)metrischen Raumes kann also durch die aus den ε-Kugeln bestehende Basis definiert werden (siehe oben). Hier ist ein weiteres Beispiel für die Definition einer Topologie durch eine Basis:

Beispiel 8.4 *Sei $\mathcal{B}_{RH}$ die Menge aller rechts halboffenen Intervalle, also $\mathcal{B}_{RH} := \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R};\ a < b\}$. Das ist die Basis einer Topologie τ_{RH} von $\mathbb{R}$ (die* ***RH-Topologie****).*

Beweis: Wir überprüfen die beiden charakteristischen Eigenschaften aus Satz 8.3:

1) $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1)$.

2) Sei $x \in [a, b) \cap [c, d)$.

Wir setzen $g := \max\{a, c\}$ und $h := \min\{b, d\}$ und zeigen, dass

$$x \in [g, h) \subset [a, b) \cap [c, d).$$

Wegen $a \le x < b$ und $c \le x < d$ ist $g \le x < h$ und somit $x \in [g, h)$.

Sei nun $y \in [g, h)$.

Wegen $a \le g \le y < h \le b$ ist $y \in [a, b)$, und wegen $c \le g \le y < h \le d$ ist $y \in [c, d)$. Also folgt $y \in [a, b) \cap [c, d)$. ■

Bemerkung 8.5 *Die RH-Topologie τ_{RH} ist echt feiner als die übliche Topologie τ_u von $\mathbb{R}$.*

Beweis: Jedes offene Intervall (a,b) ist auch offen in der RH-Topologie, denn $(a,b) = \bigcup_{n=2}^{\infty}[a+\frac{b-a}{n}, b)$. Daher ist $\tau_u \subset \tau_{RH}$. Die rechts halboffenen Intervalle sind aber nicht offen in der üblichen Topologie (Übungsaufgabe), also gilt $\tau_u \subsetneqq \tau_{RH}$. ■

Bemerkung 8.6 *Wir werden später sehen, dass die RH-Topologie nicht metrisierbar ist (Beispiel 9.26).*

Bemerkung 8.7 *Die rechts halboffenen Intervalle sind bezüglich τ_{RH} sowohl offen als auch abgeschlossen.*

Beweis: Sei $a < b$. Es ist nur noch zu zeigen, dass $[a,b)$ τ_{RH}-abgeschlossen ist. Das folgt so:

$$\mathbb{R}\backslash[a,b) = (-\infty,a) \cup [b,\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty}[a-n,a) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}[b,b+n) \in \tau_{RH}. \blacksquare$$

Definition 8.8 *Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **rechtsseitig stetig** (in x), wenn f (τ_{RH}, τ_u)-stetig (in x) ist.*

Definition 8.9 *Die Begriffe **LH-Topologie** und **linksseitig stetig** werden analog definiert.*

Jede stetige Funktion ist natürlich rechtsseitig stetig. Davon gilt aber nicht die Umkehrung:

Beispiel 8.10 *Für $x \in \mathbb{R}$ sei $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl $\leq x$. Dann ist die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ rechtsseitig stetig, aber nicht stetig (bezüglich der üblichen Topologie τ_u von $\mathbb{R}$).*

Beweis:

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $H := [\lfloor x_0 \rfloor, \lfloor x_0 \rfloor + 1)$. Alle Punkte x aus diesem rechts halboffenen Intervall haben denselben Funktionswert $f(x) = f(x_0) = \lfloor x_0 \rfloor$. Für jede ε-Kugel K um $f(x_0)$ mit $\varepsilon < 1$ gilt daher $f^{-1}(K) = H$, also ist $f^{-1}(K)$ eine Umgebung von x_0 bezüglich τ_{RH}.

f ist klarerweise nicht stetig bezüglich τ_u, da $f^{-1}(K) = H$ keine τ_u-Umgebung von $\lfloor x_0 \rfloor$ ist. ■

Bemerkung 8.11 *Wenn eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rechts- und linksseitig stetig ist, dann ist sie stetig (bezüglich τ_u).*

Beweis: Sei U eine Umgebung von $f(x)$ bezüglich τ_u. Wenn f in x rechts- und linksseitig stetig ist, dann ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x in den Topologien τ_{RH} und τ_{LH}. Daher muss es $y, z \in \mathbb{R}$ mit $y < x < z$ geben, sodass $(y, x] \subset f^{-1}(U)$ und $[x, z) \in f^{-1}(U)$ (siehe nächster Satz). Es folgt $x \in (y, z) \subset f^{-1}(U)$, also ist $f^{-1}(U)$ eine τ_u-Umgebung von x. ■

Satz 8.12 *Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $\mathcal{B}$ eine Basis von τ. Dann enthält $\mathcal{B}$ zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebungsbasis von x.*

Beweis: Sei $\mathcal{V}(x) := \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$. Wir zeigen, dass $\mathcal{V}(x)$ eine Umgebungsbasis von x ist.

Zunächst ist natürlich jedes $B \in \mathcal{V}(x)$ eine Umgebung von x.

Sei nun U eine beliebige Umgebung von x. Dann gibt es ein $G \in \tau$ mit $x \in G \subset U$. $G = \bigcup_{i \in I} B_i$ für gewisse $B_i \in \mathcal{B}$, also gibt es einen Index $i_0 \in I$, sodass $x \in B_{i_0} \subset G \subset U$, also $B_{i_0} \in \mathcal{V}(x)$ und $B_{i_0} \subset U$. ■

Kapitel 9

Hausdorffräume und die Konvergenz von Folgen

9.1 Konvergenz und Limes von Folgen

Definition 9.1 *Sei (x_n) eine Folge in einer Menge X. Unter einem* ***Endstück*** *dieser Folge verstehen wir eine Menge der Gestalt*

$$\{x_m, x_{m+1}, \ldots\} = \{x_n : n \geq m\}$$

mit einem (festen) $m \in \mathbb{N}$.

Definition 9.2 *Eine Folge (x_n) in einem topologischen Raum X heißt* ***konvergent gegen*** *$y \in X$, wenn in jeder Umgebung von y ein Endstück von (x_n) liegt. y heißt dann* ***Limes*** *von (x_n). Bezeichnung: $x_n \to y$.*

Bemerkung 9.3 *(x_n) ist genau dann konvergent gegen y, wenn in jeder Umgebung aus einer Umgebungsbasis von x ein Endstück von (x_n) liegt. In einem (halb)metrischen Raum heißt das: $\forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N} : x_n \in K_\varepsilon(y)$ für alle $n \geq m$.*

Bemerkung 9.4 *Sei (x_n) eine Folge in einem (halb)metrischen Raum (X, d). Dann gilt $x_n \to y$ genau dann, wenn $d(x_n, y) \to 0$ (bezüglich der üblichen Topologie von $\mathbb{R}$).*

Beweis: $x_n \to y \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon : x_n \in K_\varepsilon(y)$ für alle $n \geq n_\varepsilon \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon : d(x_n, y) < \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon \Leftrightarrow d(x_n, y) \to 0$. ■

Bemerkung 9.5 *In einem topologischen Raum ist der Limes im Allgemeinen nicht eindeutig.*

Beispiel 9.6 *Sei* $z_n = (\frac{1}{n}, 0)$ *im* $\mathbb{R}^2$ *mit der Halbmetrik* $d'((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := |x_1 - x_2|$. *Dann ist jeder Punkt* $(0, y)$ *mit* $y \in \mathbb{R}$ *Limes von* (z_n), *denn in jeder* ε*-Kugel um* $(0, y)$ *liegen alle* z_n *mit* $n > \frac{1}{\varepsilon}$, *da* $d'((\frac{1}{n}, 0), (0, y)) = \frac{1}{n}$.

Im Allgemeinen bezeichnen wir daher mit $\lim_{n\to\infty} x_n$ die *Menge aller Limiten* von (x_n). Wenn der Limes eindeutig ist, bezeichnen wir das eine Element dieser Menge genauso, und nur dann ist die Schreibweise $y = \lim_{n\to\infty} x_n$ sinnvoll.

9.2 Hausdorffräume

Topologische Räume, in denen jede Folge höchstens einen Limes hat, sind natürlich von besonderer Bedeutung. Diese werden folgenderweise definiert:

Definition 9.7 *Ein topologischer Raum* (X, τ) *heißt* ***Hausdorffraum*** *oder* ***separiert****, wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten* x *und* y *von* X *disjunkte Umgebungen* U *von* x *und* V *von* y *gibt.*

Beispiele von Hausdorffräumen:

1. Jeder metrische Raum ist ein Hausdorffraum: Sei $x \neq y$ und $\varepsilon := \frac{1}{2}d(x, y) > 0$. Dann ist $K_\varepsilon(x) \cap K_\varepsilon(y) = \emptyset$.

   (Wäre $z \in K_\varepsilon(x) \cap K_\varepsilon(y)$, dann wäre $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) < \varepsilon + \varepsilon = d(x, y)$, Widerspruch.)

   Bemerkung: Wenn ein halbmetrischer Raum (X, d) ein Hausdorffraum ist, dann ist d in Wirklichkeit ein Metrik.

   Beweis: Wäre $d(x, y) = 0$ für $x \neq y$, dann wäre (wegen der Dreiecksungleichung) $K_\varepsilon(x) = K_\varepsilon(y)$ für alle $\varepsilon > 0$, also gäbe es keine disjunkten Umgebungen von x und y. ■

2. $(\mathbb{R}, \tau_{RH})$ ist ein Hausdorffraum: Sei $x \neq y$, o.B.d.A $x < y$. Dann sind $[x, y)$ und $[y, y + 1)$ disjunkte Umgebungen von x bzw. y.

   (Man kann aber zeigen, dass τ_{RH} nicht metrisierbar ist, siehe Beispiel 9.26)

3. Eine unendliche Menge X mit der kofiniten Topologie ist kein Hausdorffraum (und daher auch nicht metrisierbar).

   Beweis: Sei $x_1 \neq x_2$. Angenommen, es gibt zwei disjunkte offene Mengen G_1, G_2 bezüglich der kofiniten Topologie, sodass $x_1 \in G_1$ und $x_2 \in G_2$. Aus $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ folgt aber $G_1 \subset X \backslash G_2$, und das wäre eine endliche Menge. Anderseits müsste auch $X \backslash G_1$ endlich sein und somit auch $X = G_1 \cup (X \backslash G_1)$, Widerspruch. ■

Satz 9.8 *In einem Hausdorffraum hat jede Folge höchstens einen Limes.*

Beweis: Angenommen, (x_n) hat zwei verschiedene Limiten y und z. Dann gibt es eine Umgebung U von y und eine Umgebung V von z, sodass $U \cap V = \emptyset$. In U müsste dann ein Endstück von (x_n) liegen, sagen wir alle x_n mit $n > m_1$. In V müsste aber ebenso ein Endstück liegen, sagen wir alle x_n mit $n > m_2$. Die x_n mit $n > \max\{m_1, m_2\}$ würden dann in $U \cap V$ liegen, im Widerspruch zu $U \cap V = \emptyset$. ■

Satz 9.9 *Seien f und g zwei stetige Abbildungen $X \to Y$ und Y ein Hausdorffraum. Dann ist die Menge $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ abgeschlossen.*

Beweis: Sei $A := \{x \in X : f(x) = g(x)\}$.
Wir zeigen, dass das Komplement von A offen ist.
Sei $x \in X \backslash A$. Dann ist $f(x) \neq g(x)$. Da Y ein Hausdorffraum ist, gibt es Umgebungen U und V von $f(x)$ bzw. $g(x)$ mit $U \cap V = \emptyset$.
Wegen der Stetigkeit von f und g ist $W := f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ eine Umgebung von x.
$W \subset X \backslash A$, denn für alle $y \in W$ gilt $f(y) \in U$ und $g(y) \in V$, und wegen $U \cap V = \emptyset$ folgt daraus $f(y) \neq g(y)$.
Wir sehen somit, dass $X \backslash A$ eine Umgebung von x ist (für alle $x \in X \backslash A$), und daraus folgt: $X \backslash A$ ist offen. ■

Folgerung 9.10 *Seien f und g zwei stetige Abbildungen $X \to Y$, und Y sei ein Hausdorffraum. Wenn f und g auf einer dichten Teilmenge D von X übereinstimmen, dann ist $f = g$.*

Beweis: $A := \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ ist nach dem vorigen Satz abgeschlossen. Wenn nun $D \subset A$, dann ist auch $\overline{D} \subset A$, und wegen $\overline{D} = X$ folgt $A = X$. ■

Bemerkung 9.11 *Eine Funktion $D \to Y$ kann also höchstens auf eine Weise zu einer stetigen Funktion $X \to Y$ fortgesetzt werden, wenn Y ein Hausdorffraum und D dicht in X ist.*

Natürlich kann eine stetige Funktion $D \to Y$ nicht immer zu einer stetigen Funktion $X \to Y$ fortgesetzt werden. Ein einfaches Beispiel dafür ist die Funktion $\mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1/x$.

9.3 Berührungspunkte und die Konvergenz von Folgen

In (halb)metrischen Räumen können viele topologische Sachverhalte durch konvergente Folgen beschrieben werden, z.B.:

Satz 9.12 *Sei M eine Teilmenge eines (halb)metrischen Raumes X und $y \in X$. y ist genau dann Berührungspunkt von M, wenn es eine gegen y konvergente Folge von Elementen aus M gibt.*

Beweis:
1) Sei $y \in \lim_{n\to\infty} x_n$ mit $x_n \in M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Dann liegt in jeder Umgebung U von y ein Endstück dieser Folge, also ist $M \cap U \neq \emptyset$.
(Diese Richtung gilt natürlich in allen topologischen Räumen.)
2) Sei $y \in \overline{M}$. Dann ist $K_{1/n}(y) \cap M \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei nun x_n ein beliebiges Element aus $K_{1/n}(y) \cap M$, für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $d(x_n, y) < 1/n$, also $d(x_n, y) \to 0$ und daher $x_n \to y$. ■
Im folgenden wichtigen Beispiel wird ein topologischer Raum definiert, in dem dieser Satz nicht gilt.

Beispiel 9.13 *Sei $I := [0,1]$ und $\mathbb{R}^I$ die Menge aller Funktionen $I \to \mathbb{R}$. Für $f \in \mathbb{R}^I$ und $x_1, \ldots, x_k \in I$ sowie $\varepsilon > 0$ sei*

$$U(f; x_1 \ldots, x_k; \varepsilon) := \{g \in \mathbb{R}^I : |g(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, k\}\}.$$

Wir definieren nun eine Topologie so, dass alle diese Mengen für festes f eine Umgebungsbasis von f bilden. Wir sagen also: eine Teilmenge G von $\mathbb{R}^I$ heißt offen, wenn gilt

$$\forall f \in G \;\; \exists\, k \in \mathbb{N},\; x_1, \ldots, x_k \in I,\; \varepsilon > 0 : U(f; x_1 \ldots, x_k; \varepsilon) \subset G.$$

Dadurch wird wirklich eine Topologie definiert, und bezüglich dieser Topologie gilt

$$f_n \to f \Leftrightarrow f_n(x) \to f(x) \text{ für alle } x \in I.$$

Diese Topologie heißt daher die ***Topologie der punktweisen Konvergenz****.*

Beweis: Sei τ die Menge aller oben definierten offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^I$.
1) $\emptyset \in \tau$ und $X \in \tau$: trivial.
2) τ enthält mit beliebig vielen Teilmengen auch deren Vereinigung: trivial.

3) τ enthält mit je zwei Mengen auch deren Durchschnitt: Seien $G_1, G_2 \in \tau$ und $f \in G_1 \cap G_2$. Dann gibt es $x_1 \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_\ell \in I$ und $\varepsilon, \eta > 0$, sodass $U(f; x_1 \ldots, x_k; \varepsilon) \subset G_1$ und $U(f; y_1 \ldots, y_\ell; \eta) \subset G_2$. Mit $\delta := \min\{\varepsilon, \eta\}$ gilt dann
$U(f; x_1 \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_\ell, \delta) \subset G_1 \cap G_2$.
4) Jede Menge $U(f; x_1 \ldots, x_k; \varepsilon)$ ist eine Umgebung von f: Sie enthält natürlich f, aber sie ist auch offen:
Sei $g \in U(f; x_1 \ldots, x_k; \varepsilon)$ und $\delta_i := \varepsilon - |g(x_i) - f(x_i)| > 0$. Mit $\delta := \min\{\delta_1, \ldots, \delta_k\}$ ist dann leicht zu sehen, dass $U(g; x_1 \ldots, x_k; \delta) \subset U(f; x_1 \ldots, x_k; \varepsilon)$ (Dreiecksungleichung).
5) Die Mengen $U(f; x_1 \ldots, x_k; \varepsilon)$ bilden für festes f eine Umgebungsbasis von f, denn zu jeder Umgebung V von f gibt es eine offene Menge G mit $f \in G \subset V$, also gibt es ein $U(f; x_1 \ldots, x_k; \varepsilon)$ mit $f \in U(f; x_1 \ldots, x_k; \varepsilon) \subset G \subset V$.
6) Sei $f_n \to f$ und $x_0 \in I$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass $f_n \in U(f; x_0; \varepsilon)$ für $n \geq n_\varepsilon$,
das heißt $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$ für $n \geq n_\varepsilon$, also folgt $f_n(x_0) \to f(x_0)$.
7) Sei umgekehrt $f_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in I$.
Sei V eine beliebige Umgebung von f. Dann gibt es ein $U(f; x_1 \ldots, x_k; \varepsilon) \subset V$.
$f_n(x_i) \to f(x_i)$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$, also gibt es zu jedem solchen i ein n_i, sodass $|f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_i$.
Sei nun $m := \max\{n_1, \ldots, n_k\}$. Dann gilt $|f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon$ für alle $n \geq m$, also $f_n \in V$ für alle $n \geq m$. ■

Bemerkung 9.14 *In $\mathbb{R}^I$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz ist das Analogon zu Satz 9.12 nicht gültig.*

Beweis: Wir betrachten folgende Teilmenge von $\mathbb{R}^I$:
$M := \{h \in \mathbb{R}^I : h(x) = 0$ für alle $x \in I$ bis auf endlich viele Ausnahmen$\}$,
und das folgenderweise definierte Element f von $\mathbb{R}^I$: $f(x) := 1$ für alle $x \in I$.
Offensichtlich ist $f \notin M$.
$f \in \overline{M}$, d.h. $U(f; x_1 \ldots, x_k; \varepsilon) \cap M \neq \emptyset$ für jede solche Umgebung von f, denn die folgende Funktion h ist ein Element dieses Durchschnitts:

$$h(x) := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in \{x_1 \ldots, x_k\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gibt aber keine Folge von Elementen aus M, welche gegen f konvergiert:
Angenommen, $h_n \to f$ mit $h_n \in M$. Dann gilt $h_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in I$.
Sei nun $A_n := \{x \in I : h_n(x) \neq 0\}$. Das ist nach Definition von M für jedes n eine endliche Menge. Daher ist $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ abzählbar und folglich $I \backslash A$ nicht leer. Für $x \in I \backslash A$ ist $h_n(x) = 0$ für alle n, also $h_n(x) \to 0$, im Widerspruch zu $f(x) = 1$. ■

9.4 Das erste Abzählbarkeitsaxiom

Wenn man solche topologischen Räume wie $\mathbb{R}^I$ ausschließen will, muss man die folgende zusätzliche Eigenschaft voraussetzen:

Definition 9.15 *Wenn es in einem topologischen Raum X zu jedem Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis gibt, so sagt man: X* ***erfüllt das 1. Abzählbarkeitsaxiom.***

Bemerkung 9.16 *Jeder (halb)metrische Raum erfüllt das 1. Abzählbarkeitsaxiom.*

Beweis: Die Kugeln $K_{1/n}(x)$ mit $n \in \mathbb{N}$ bilden eine Umgebungsbasis von x. ■

Bemerkung 9.17 *Es gibt auch nicht(halb)metrisierbare Räume, die das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllen, z.B. $\mathbb{R}$ mit der RH-Topologie.*

Beweis: $\{[x, x + \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Umgebungsbasis von x. ■

Satz 9.18 *Sei X ein topologischer Raum, der das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, und $M \subset X$. Dann gilt: y ist genau dann Berührungspunkt von M, wenn es eine gegen y konvergente Folge von Elementen aus M gibt.*

(Das ist also eine Verallgemeinerung von Satz 9.12.)

Beweis: Es ist nur zu zeigen: Wenn $y \in \overline{M}$, dann gibt es eine gegen y konvergente Folge von Elementen aus M. (Siehe Beweis von Satz 9.12.)

Sei also $y \in \overline{M}$ und $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Umgebungsbasis von y.

Sei $W_n := V_1 \cap \ldots \cap V_n$. Dann gilt $W_{n+1} \subset W_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ können wir ein $x_n \in W_n \cap M$ auswählen. Wir betrachten dann die Folge (x_n).

Sei U eine Umgebung von y. Es gibt ein n_0, sodass $V_{n_0} \subset U$. Dann ist aber $W_n \subset U$ für alle $n \geq n_0$ und daher auch $x_n \in U$ für alle $n \geq n_0$. ■

Folgerung 9.19 *Zwei Topologien τ_1, τ_2 auf X, welche das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllen, sind genau dann gleich, wenn für alle $x \in X$ gilt:*

$$x_n \to x \text{ in } \tau_1 \iff x_n \to x \text{ in } \tau_2.$$

Solche Topologien sind also durch ihre konvergenten Folgen vollständig bestimmt.

Beweis: Wenn diese Bedingung erfüllt ist, dann liegen bezüglich beiden Topologien dieselben Berührungspunkte vor, daher auch dieselben abgeschlossenen Mengen und somit auch dieselben offenen Mengen. ■

Satz 9.20 *Sei X ein topologischer Raum, der das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, und Y ein beliebiger topologischer Raum. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann stetig in $x \in X$, wenn aus $x_n \to x$ stets $f(x_n) \to f(x)$ folgt.*

Beweis:
1) Sei f stetig in x und $x_n \to x$.
Sei U eine Umgebung von $f(x)$. Wegen der Stetigkeit von f ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x und enthält daher ein Endstück von (x_n), d.h. $x_n \in f^{-1}(U)$ für alle $n \geq n_0$. Daraus folgt $f(x_n) \in U$ für alle $n \geq n_0$, und wir sehen: $f(x_n) \to f(x)$.
(Für diese Richtung benötigen wir also nicht das 1. Abzählbarkeitsaxiom.)
2) Wir setzen nun voraus, dass aus $x_n \to x$ stets $f(x_n) \to f(x)$ folgt.
Angenommen, es gibt eine Umgebung U von $f(x)$, sodass $f^{-1}(U)$ keine Umgebung von x ist. Sei (wie beim Beweis von Satz 9.18) $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Umgebungsbasis von x und $W_n := V_1 \cap \ldots \cap V_n$. Wenn $f^{-1}(U)$ keine Umgebung von x ist, dann kann W_n keine Teilmenge von $f^{-1}(U)$ sein, also gibt es ein $x_n \in W_n \backslash f^{-1}(U)$. Wie bei Satz 9.18 sehen wir, dass $x_n \to x$. Aber $x_n \notin f^{-1}(U)$, also $f(x_n) \notin U$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das ist ein Widerspruch zu $f(x_n) \to f(x)$. ■

9.5 Das zweite Abzählbarkeitsaxiom

Es gibt noch ein stärkeres Abzählbarkeitsaxiom:

Definition 9.21 *Wenn die Topologie τ von X eine abzählbare Basis besitzt, sagt man: (X, τ) erfüllt das **2. Abzählbarkeitsaxiom**.*

Bemerkung 9.22 *Aus dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom folgt das erste, denn jede Basis von τ enthält für jeden Punkt eine Umgebungsbasis (Satz 8.12).*

Satz 9.23 *Wenn (X, τ) das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, dann ist (X, τ) separabel.*

Beweis: Sei $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots\}$ eine abzählbare Basis von τ. Alle B_i sind nicht leer, also können wir $x_i \in B_i$ wählen. Wir zeigen nun, dass die Menge $D = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ dicht in X ist. Sei $y \in X$ und U eine Umgebung von y. $\mathcal{B}$ enthält eine Umgebungsbasis von y, also gibt es ein i_0, sodass $y \in B_{i_0} \subset U$. Dann ist aber $x_{i_0} \in U$ und somit $U \cap D \neq \emptyset$. ■
In (halb)metrischen Räumen gilt davon auch die Umkehrung:

Satz 9.24 *Ein halbmetrischer Raum ist genau dann separabel, wenn er das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.*

Beweis: Sei (X, d) ein separabler halbmetrischer Raum. Dann gibt es eine abzählbare dichte Teilmenge $D = \{x_1, x_2, \ldots\}$ von X.

Sei nun $\mathcal{B} := \{K_r(x_n) : r \in \mathbb{Q},\ n \in \mathbb{N}\}$. Das ist eine abzählbare Menge, da $\mathbb{Q} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist. Wir zeigen, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von τ ist.

Sei $G \in \tau$ und $x \in G$. Dann gibt es jedenfalls eine ε-Kugel $K_\varepsilon(x) \subset G$. Sei $r \in \mathbb{Q}$ so, dass $0 < r < \varepsilon/2$. Da D dicht ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $x_n \in K_r(x)$, also $d(x, x_n) < r$ und somit $x \in K_r(x_n)$. Aber $K_r(x_n) \subset G$, denn

$y \in K_r(x_n) \Rightarrow d(y, x) \leq d(y, x_n) + d(x_n, x) \leq r + r < \varepsilon \Rightarrow y \in K_\varepsilon(x) \subset G.$

Es folgt: Für alle $x \in G$ gibt es ein $B_x \in \mathcal{B}$ (nämlich obiges $K_r(x_n)$) mit $x \in B_x \subset G$, und daher ist $G = \bigcup_{x \in G} B_x$, was zu zeigen war. ∎

Beispiel 9.25 *Der $\mathbb{R}^n$ erfüllt das 2. Abzählbarkeitsaxiom, da er separabel ist.*

Beispiel 9.26 $\mathbb{R}$ *mit der RH-Topologie ist ein separabler topologischer Raum, der zwar das 1., aber nicht das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Er kann daher nicht (halb)metrisierbar sein.*

Beweis: Die RH-Topologie τ_{RH} erfüllt das 1. Abzählbarkeitsaxiom, da die Intervalle $[x, x+1/n)$ eine Umgebungsbasis von x bilden (siehe Bemerkung 9.17). Da in jedem solchen Intervall eine rationale Zahl liegt, ist diese Topologie separabel.

Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von τ_{RH}. $\mathcal{B}$ enthält zu jedem Punkt eine Umgebungsbasis. Daher gibt es insbesondere für alle $x \in \mathbb{R}$ eine Menge $B_x \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_x \subset [x, x+1)$. Dadurch wird eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathcal{B} : x \mapsto B_x$ definiert. Diese Abbildung ist aber injektiv, denn x ist das kleinste Element von B_x. Somit folgt: $f(\mathbb{R})$ ist gleichmächtig zu $\mathbb{R}$, also überabzählbar. Da $f(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}$, muss auch $\mathcal{B}$ überabzählbar sein. ∎

Kapitel 10

Kompaktheit

Definition 10.1 *Eine Familie* $(G_i)_{i\in I}$ *offener Teilmengen von* X *heißt* ***(offene) Überdeckung*** *von* X*, wenn* $\bigcup_{i\in I} G_i = X$.

Definition 10.2 *Ein topologischer Raum* X *heißt* ***kompakt****, wenn es zu jeder offenen Überdeckung* $(G_i)_{i\in I}$ *eine endliche Teilmenge* E *von* I *gibt, sodass bereits* $(G_i)_{i\in E}$ *eine Überdeckung von* X *bildet.*

In einem kompakten topologischen Raum gibt es also zu jeder offenen Überdeckung eine endliche überdeckende Teilfamilie.

Definition 10.3 *Eine Teilmenge* M *eines topologische Raumes* X *heißt* ***kompakt****, wenn sie bezüglich der Spurtopologie ein kompakter topologischer Raum ist.*

Bemerkung 10.4 *Eine Teilmenge* M *eines topologische Raumes* X *ist genau dann kompakt, wenn folgendes gilt:*
$M \subset \bigcup_{i\in I} G_i$ *und* G_i *offen in* X $\Rightarrow$
$\exists$ *endliche Teilmenge* E *von* I *mit* $M \subset \bigcup_{i\in E} G_i$.

Beweis: Das folgt leicht aus der Tatsache, dass die offenen Mengen G_i' bezüglich der Spurtopologie von M von der Form $G_i \cap M$ sind, wobei G_i offen in X ist. ■

Wir sehen uns nun insbesondere die kompakten metrischen Räume näher an. Diese sind in besonderer Weise "beschränkt".

Definition 10.5 *Ein metrischer Raum* (X, d) *heißt* ***beschränkt****, wenn es ein* $r > 0$ *und ein* $x \in X$ *gibt, sodass* $X \subset K_r(x)$.

Definition 10.6 *Ein metrischer Raum (X, d) heißt* ***totalbeschränkt****, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Überdeckung von X mit endlich vielen ε-Kugeln gibt.*

Das ist eine stärkere Beschränktheitsbedingung:

Bemerkung 10.7 *Jeder totalbeschränkte metrische Raum ist beschränkt, aber nicht umgekehrt.*

Beweis:
a) Sei (X, d) totalbeschränkt. Dann gibt es z.B. eine Überdeckung von X mit endlich vielen Kugeln vom Radius 1, sagen wir $X \subset \bigcup_{i=1}^{n} K_1(x_i)$. Sei $r = \max_{1 \leq i \leq n} d(x_i, x_1)$.
Sei x beliebig $\in X$. Dann gibt es ein i_0, sodass $x \in K_1(x_{i_0})$, und somit
$d(x, x_1) \leq d(x, x_{i_0}) + d(x_{i_0}, x_1) < 1 + r$. Es folgt: $X \subset K_{1+r}(x_1)$, also X beschränkt.
b) Beispiel eines beschränkten metrischen Raumes, der nicht totalbeschränkt ist:
Sei X eine unendliche Menge und d die diskrete Metrik darauf (siehe Beispiel 1 von Kapitel 2). Dann ist $X \subset K_2(x)$ für ein beliebiges $x \in X$ und somit X beschränkt. Andererseits gilt $K_1(x) = \{x\}$ für alle $x \in X$, also kann man von der durch diese Kugeln gebildeten unendlichen Überdeckung keine weglassen. X ist daher nicht totalbeschränkt. ■

Bemerkung 10.8 *Jeder kompakte metrische Raum ist totalbeschränkt.*

Beweis: Die Familie aller $K_\varepsilon(x)$ mit $x \in X$ überdeckt trivialerweise X. Wenn X kompakt ist, genügen daher endlich viele solche Kugeln, um X zu überdecken. ■
Anschaulich kann man das so interpretieren: kompakte metrische Räume sind beliebig genau durch endliche Mengen "approximierbar".

Aus der Analysis kennen wir:

Satz 10.9 (von Heine-Borel): *Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist (als Teilraum bezüglich der üblichen Topologie) genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Bemerkung 10.10 *Nicht jede abgeschlossene beschränkte Teilmenge eines metrischen Raumes ist kompakt.*

Beispiel: Sei X eine unendliche Menge mit der diskreten Metrik. Dann ist X beschränkt (siehe oben). Natürlich ist X auch abgeschlossen. X ist aber nicht kompakt, da es nicht totalbeschränkt ist (siehe oben). ■

Satz 10.11 *In einem kompakten metrischen Raum besitzt jede Folge eine konvergente Teilfolge.*

Beweis: Sei $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in dem kompakten metrischen Raum X.
Wir betrachten die Endstücke $E_n := \{x_i : i > n\}$.

1. Fall: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{E_n} \neq \emptyset$.

Sei $y \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{E_n}$. Dann ist $K_{1/m}(y) \cap E_n \neq \emptyset$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$.
Wir definieren nun folgenderweise rekursiv eine Teilfolge $(x_{i_m})_{m\in\mathbb{N}}$:
Sei

$$x_{i_1} \in K_1(y) \cap E_1,$$

und wenn $x_{i_1}, \dots, x_{i_{m-1}}$ bereits definiert sind, sei $i_m > i_{m-1}$ so, dass

$$x_{i_m} \in K_{1/m}(y) \cap E_{i_{m-1}}.$$

Dann gilt $d(x_{i_m}, y) \leq \frac{1}{m} \to 0$. Somit ist (x_{i_m}) eine gegen y konvergente Teilfolge von (x_i).

2. Fall: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{E_n} = \emptyset$.

Sei $G_n := X \backslash \overline{E_n}$. Das ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine offene Menge.
$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n = X \backslash \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{E_n} = X$, also ist (G_n) eine offene Überdeckung von X.

Wegen der Kompaktheit von X gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $X = \bigcup\limits_{n=1}^{N} G_n = X \backslash \bigcap\limits_{n=1}^{N} \overline{E_n}$.

Also ist $\bigcap\limits_{n=1}^{N} \overline{E_n} = \emptyset$.

Andererseits ist $E_N = \bigcap\limits_{n=1}^{N} E_n \subset \bigcap\limits_{n=1}^{N} \overline{E_n}$. Da $E_N \neq \emptyset$, ergibt sich ein Widerspruch.
Dieser Fall kann also gar nicht eintreten. ■
Mit diesem Satz können wir uns ein weiteres Beispiel einer abgeschlossenen, beschränkten, aber nicht kompakten Teilmenge eines metrischen Raumes überlegen:

Beispiel 10.12 *Sei b die Menge aller beschränkten reellen Zahlenfolgen mit der folgenden Metrik:*

$$d(x, y) := \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i - y_i| .$$

Dann ist die Menge $M := \{x \in b : d(x, o) \leq 1\}$ *abgeschlossen und beschränkt, aber nicht kompakt.*

Beweis: M ist trivialerweise beschränkt.

Die Menge M ist abgeschlossen, da sie das Urbild von $[0, 1]$ unter der stetigen Abbildung $b \to \mathbb{R} : x \mapsto d(x, o)$ ist.

Sei $x^{(i)} := (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) \in M$, wobei die 1 an der i-ten Stelle steht.

Die Folge $(x^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ besitzt aber keine konvergente Teilfolge, denn $d(x^{(i)}, x^{(k)}) = 1$ für $i \neq k$. Nach dem vorigen Satz kann daher M nicht kompakt sein. ■

Bemerkung 10.13 *Einen topologischen Raum, in dem jede Folge eine konvergente Teilfolge hat, nennt man* ***folgenkompakt****. Wir haben also gezeigt, dass jeder kompakte metrische Raum auch folgenkompakt ist. Davon gilt auch die Umkehrung (ohne Beweis), sodass also für die metrische Räume die Begriffe "kompakt" und "folgenkompakt" äquivalent sind.*

Bemerkung 10.14 *Die Aussage, dass jedes abgeschlossene beschränkte Intervall folgenkompakt ist, nennt man auch den "Satz von Bolzano-Weierstraß". Sie ist eine unmittelbare Folgerung aus Obigem.*

Satz 10.15 *Jede abgeschlossene Teilmenge eines kompakten topologischen Raumes ist kompakt.*

Beweis: Sei A eine abgeschlossene Teilmenge des kompakten topologischen Raumes X und $(G_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von A mit offenen Teilmengen G_i von X. Das heißt (vgl. Bemerkung 10.4)

$A \subset \bigcup_{i \in I} G_i$, also $X = (X \setminus A) \cup \bigcup_{i \in I} G_i$.

$X \setminus A$ bildet also zusammen mit $(G_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X, und daher gibt es eine endliche Teilmenge E von I, sodass $X = (X \setminus A) \cup \bigcup_{i \in E} G_i$. Daraus folgt

$A \subset \bigcup_{i \in E} G_i$. ■

Satz 10.16 *Jede kompakte Teilmenge eines Hausdorffraumes ist abgeschlossen.*

Beweis: Sei K eine kompakte Teilmenge des Hausdorffraumes X und $x \in X \setminus K$.

Zu jedem $y \in K$ gibt es offene Umgebungen U_y von y und V_y von x, sodass $U_y \cap V_y = \emptyset$.

$K \subset \bigcup_{y \in K} U_y$, Da K kompakt ist, gibt es $y_1, \dots, y_n \in K$, sodass $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}$.

Sei nun $U := \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}$ und $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i}$.

$U \cap V = \emptyset$, denn wäre $z \in U \cap V$, dann gäbe es einen Index i_0 mit $z \in U_{y_{i_0}} \cap V_{y_{i_0}} = \emptyset$, ein Widerspruch.

Da $K \subset U$, folgt $K \cap V = \emptyset$, also $V \subset X \backslash K$. Da V eine Umgebung von x ist, folgt: x ist ein innerer Punkt von $X \backslash K$, was zu zeigen war. ■

Satz 10.17 *Das Bild eines kompakten Raumes unter einer stetigen Abbildungen ist ebenfalls kompakt.*

Beweis: Sei K kompakt und $f : K \to Y$ stetig.

Sei $f(K) \subset \bigcup_{i \in I} G_i$ mit offenen Teilmengen G_i von Y.

Dann ist $K \subset f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} G_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(G_i)$. Da f stetig ist, bilden die $f^{-1}(G_i)$ also eine offene Überdeckung von K. Es gibt daher eine endliche Teilmenge E von I, sodass $K \subset \bigcup_{i \in E} f^{-1}(G_i)$ und somit $f(K) \subset f\left(\bigcup_{i \in E} f^{-1}(G_i)\right) = \bigcup_{i \in E} f(f^{-1}(G_i)) \subset \bigcup_{i \in E} G_i$. ■

Satz 10.18 *Eine bijektive stetige Abbildung $f : K \to Y$ eines kompakten Raumes K auf einen Hausdorffraum Y ist stets ein Homöomorphismus.*

Beweis: Sei A eine abgeschlossene Teilmenge von K. Dann ist A nach Satz 10.15 kompakt. Da f stetig ist, ist nach vorigen Satz $f(K)$ eine kompakte Teilmenge von Y und daher nach Satz 10.16 abgeschlossen.

$f(A)$ ist das Urbild von A unter der Abbildung f^{-1}. Also gilt: Das f^{-1}-Urbild jeder abgeschlossenen Teilmenge von K ist abgeschlossen, d.h. f^{-1} ist stetig. ■

Bemerkung 10.19 *Wie wir bereits wissen, ist nicht jede stetige bijektive Abbildung ein Homöomorphismus (siehe Bemerkung 7.18). Hier ist ein anderes Beispiel einer solchen Abbildung:*

$f : [0, 2\pi) \to S_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\} : t \mapsto (\cos t, \sin t)$.

f ist bekanntlich bijektiv und stetig.

S_1 ist kompakt, denn S_1 ist beschränkt und abgeschlossen. (Es ist ja das Urbild der abgeschlossenen Menge $\{1\}$ unter der stetigen Abbildung $x \mapsto \|x\|$.)

Wäre f^{-1} stetig, dann müsste nach Satz 10.17 auch $f^{-1}(S_1) = [0, 2\pi)$ kompakt sein. $[0, 2\pi)$ ist aber nicht kompakt, da es nicht abgeschlossen ist. ■

Definition 10.20 *Ein topologischer Raum heißt **lokal kompakt,** wenn jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt.*

Beispiele:

1. Jeder kompakte topologische Raum ist trivialerweise lokal kompakt.
2. $\mathbb{R}$ ist lokal kompakt, aber nicht kompakt: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ ist z.B. $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ eine kompakte Umgebung von x.
3. $\mathbb{Q}$ ist (als Teilraum von $\mathbb{R}$) nicht lokal kompakt.

   Beweis: Angenommen, es gibt zu 0 in $\mathbb{Q}$ eine kompakte Umgebung K. Diese müsste eine ε-Kugel enthalten, d.h. es gäbe ein $\varepsilon > 0$ mit $(-\varepsilon, \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \subset K$. Wir können natürlich annehmen, dass $\varepsilon \in \mathbb{Q}$.

   $M := [-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}] \cap \mathbb{Q}$ wäre eine abgeschlossene Teilmenge von K und somit auch kompakt. Da es sich um einen metrischen Raum handelt, wäre diese Menge somit folgenkompakt. Betrachten wir nun z.B. die Folge (x_n) der Dezimalbrüche, die $\sqrt{2}$ approximieren: $(x_n) = (1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142, \ldots)$. Dann ist $(\frac{\varepsilon}{4} x_n)$ eine Folge in M, die keine konvergente Teilfolge besitzt, denn der Limes einer solchen Teilfolge müsste mit dem Limes in $\mathbb{R}$ übereinstimmen, das ist aber $\frac{\varepsilon}{4}\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. ■

Ohne Beweis erwähnen wir den folgenden Satz:

Satz 10.21 *In einem lokal kompakten Hausdorffraum bilden die kompakten Umgebungen eines beliebigen Punktes sogar eine Umgebungsbasis.*

Kapitel 11

Die Produkttopologie

Definition 11.1 *Seien (X_1, τ_1) und (X_2, τ_2) topologische Räume. Dann wird auf $X_1 \times X_2$ die **Produkttopologie** $\tau_1 \otimes \tau_2$ durch folgende Basis definiert:*

$$\mathcal{B} := \{G_1 \times G_2 : G_1 \in \tau_1, G_2 \in \tau_2\}.$$

Bemerkung 11.2 *$\mathcal{B}$ ist wirklich die Basis einer Topologie.*

Beweis: Wir überprüfen die Kriterien von Satz 8.3.
1) $\bigcup\limits_{\substack{G_1 \in \tau_1, \\ G_2 \in \tau_2}} (G_1 \times G_2) = X_1 \times X_2$ ist trivial, denn wegen $X_i \in \tau_i$ können wir ja für G_i insbesondere X_i nehmen.
2) Seien G_i und $G_i' \in \tau_i$ für $i \in \{1, 2\}$.
Dann ist $(G_1 \times G_2) \cap (G_1' \times G_2') = (G_1 \cap G_1') \times (G_2 \cap G_2')$ auch ein Element von $\mathcal{B}$. ■

Definition 11.3 *$p_i : X_1 \times X_2 \to X_i : (x_1, x_2) \mapsto x_i$ heißt die **i-te Projektion** oder die **Projektion auf** X_i.*

Bemerkung 11.4 *Die Projektionen von $X_1 \times X_2$ auf X_1 bzw. X_2 sind stetig (bezüglich der Produkttopologie).*

Beweis: Sei z.B. $G_1 \in \tau_1$. Dann ist $p_1^{-1}(G_1) = G_1 \times X_2 \in \tau_1 \otimes \tau_2$, also ist p_1 stetig. Genauso folgt, dass auch p_2 stetig ist. ■

Satz 11.5 *Es gilt $(x_n, y_n) \to (x, y)$ in der Produkttopologie genau dann, wenn $x_n \to x$ in τ_1 und $y_n \to y$ in τ_2.*

Beweis: Da $p_1(x_n, y_n) = x_n$ und $p_2(x_n, y_n) = y_n$ folgt die eine Richtung sofort aus der vorhergehenden Bemerkung.

Für die Umkehrung nehmen wir an, dass $x_n \to x$ in τ_1 und $y_n \to y$ in τ_2.

Sei nun U eine Umgebung von (x, y). Dann gibt es $G_1 \in \tau_1, G_2 \in \tau_2$, sodass $(x, y) \in G_1 \times G_2 \subset U$.

Wegen $x_n \to x$ gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$, sodass $x_n \in G_1$ für alle $n \geq n_1$,

und wegen $y_n \to y$ gibt es ein $n_2 \in \mathbb{N}$, sodass $y_n \in G_2$ für alle $n \geq n_2$.

Daher ist $(x_n, y_n) \in G_1 \times G_2 \subset U$ für alle $n \geq \max\{n_1, n_2\}$. Es folgt: $(x_n, y_n) \to (x, y)$. ■

Für cartesische Produkte von endlich vielen topologischen Räumen geht alles analog. Für Produkte von unendlich vielen Räumen muss man jedoch etwas anders vorgehen:

Definition 11.6 *Seien X_i seien beliebige Mengen für alle $i \in I$, wobei I ebenfalls eine beliebige Menge ist. Dann versteht man unter dem **cartesischen Produkt** $\prod\limits_{i \in I} X_i$ die Menge aller Familien $(x_i)_{i \in I}$ mit $x_i \in X_i$ für alle $i \in I$. Jede solche Familie kann auch als Abbildung*

$$f : I \to \bigcup_{i \in I} X_i \quad \text{mit } f(i) \in X_i \text{ für alle } i \in I$$

aufgefasst werden (mit $f(i) = x_i$).

*Unter der i_0**-ten Projektion** oder der **Projektion auf** X_{i_0} versteht man die Abbildung*

$$p_{i_0} : \prod_{i \in I} X_i \to X_{i_0} : (x_i)_{i \in I} \mapsto x_{i_0}$$

bzw.

$$p_{i_0} : \prod_{i \in I} X_i \to X_{i_0} : f \mapsto f(i_0).$$

Bemerkung 11.7 *Wenn alle X_i gleich X sind, dann schreibt man statt $\prod\limits_{i \in I} X_i$ auch X^I. Das ist also die Menge aller Abbildungen $I \to X$.*

Beispiel 11.8 *Sei $I = [0, 1]$ und $X_i = \mathbb{R}$ für alle $i \in I$. Dann ist $\prod\limits_{i \in I} X_i = \mathbb{R}^I = \mathbb{R}^{[0,1]}$ (siehe Beispiel 9.13).*

Definition 11.9 *Seien (X_i, τ_i) topologische Räume. Dann versteht man unter der **Produkttopologie** $\bigotimes\limits_{i \in I} \tau_i$ auf $\prod\limits_{i \in I} X_i$ die kleinste Topologie, bezüglich der alle Projektionen p_i stetig sind.*

Bemerkung 11.10 *Sei $G_{i_0} \in \tau_{i_0}$. Dann gehört also*

$$\begin{aligned} p_{i_0}^{-1}(G_{i_0}) &= \{x \in \prod_{i\in I} X_i : x_{i_0} \in G_{i_0}\} = \\ &= \{f \in \prod_{i\in I} X_i : f(i_0) \in G_{i_0}\} \end{aligned}$$

zur Produkttopologie, und folglich auch alle Durchschnitte von endlich vielen solchen Mengen. Da diese Durchschnitte die Kriterien von Satz 8.3 erfüllen, bilden sie eine Basis der Produkttopologie.

Für $I = \{1, 2\}$ erhalten wir insbesondere Mengen der Form $p_1^{-1}(G_1) \cap p_2^{-1}(G_2) = (G_1 \times X_2) \cap (X_1 \times G_2) = G_1 \times G_2$, und daher ergibt sich in diesem Fall dasselbe wie oben bei Definition 11.1.

Satz 11.5 lässt sich ohne weiteres auf beliebige Produkträume verallgemeinern:

Satz 11.11 *Sei $x^{(n)} = (x_i^{(n)})_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen $y = (y_i)_{i\in I}$, wenn $(x_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $i \in I$ gegen y_i konvergiert.*

Beweis: Übungsaufgabe.

Bemerkung 11.12 *Die Topologie der punktweisen Konvergenz auf $\mathbb{R}^I$ (siehe Beispiel 9.13) ist ein Spezialfall einer Produkttopologie (mit unendlich vielen Faktoren).*

Satz 11.13 *Das cartesische Produkt von Hausdorffräumen ist (bezüglich der Produkttopologie) ebenfalls ein Hausdorffraum.*

Beweis: Seien $x = (x_i)_{i\in I}$ und $y = (y_i)_{i\in I}$ aus $\prod_{i\in I} X_i$, $x \neq y$. Dann gibt es ein $i_0 \in I$, sodass $x_{i_0} \neq y_{i_0}$. Wenn X_{i_0} ein Hausdorffraum ist, gibt es disjunkte Umgebungen U von x_{i_0} und V von y_{i_0}. Dann sind aber (wegen der Stetigkeit von p_{i_0}) $p_{i_0}^{-1}(U)$ und $p_{i_0}^{-1}(V)$ disjunkte Umgebungen von x bzw. y. (Es gilt ja $p_{i_0}^{-1}(U) \cap p_{i_0}^{-1}(V) = p_{i_0}^{-1}(U \cap V) = p_{i_0}^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.) ■

Satz 11.14 *Seien Y sowie X_i $(i \in I)$ topologische Räume und $X = \prod_{i\in I} X_i$ mit der Produkttopologie. Eine Abbildung $f : Y \to X$ ist genau dann stetig, wenn die Abbildungen $p_i \circ f : Y \to X_i$ für alle $i \in I$ stetig sind.*

Beweis: Wenn f stetig ist, dann sind natürlich auch alle $p_i \circ f$ stetig.

Nehmen wir also umgekehrt an, dass alle $p_i \circ f$ stetig sind.

Sei G eine offene Menge in X. Dann ist G als Vereinigung von Mengen darstellbar, welche ihrerseites Durchschnitte von endlich vielen Mengen der Form $p_i^{-1}(G_i)$ mit $G_i \in \tau_i$ sind (Bemerkung 11.10).

Wenn alle $p_i \circ f$ stetig sind, dann sind alle Mengen $(p_i \circ f)^{-1}(G_i) = f^{-1}(\,p_i^{-1}(G_i))$ offen in Y. Da f^{-1} mit Durchschnitt und Vereinigung vertauschbar ist, folgt: $f^{-1}(G)$ ist eine Vereinigung von Durchschnitten endlich vieler solcher Mengen und daher auch offen. ■

Beispiel 11.15 *Die bijektive Abbildung vom Cantor'schen Diskontinuum auf* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *(siehe Bemerkung 5.14) ist ein Homöomorphismus, wenn man auf* $\{0,1\}$ *die diskrete Topologie zu Grunde legt.*

Beweis: Sei $f : C \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ diese Abbildung.

1) Stetigkeit von f: Es gilt $p_k(f(x)) = i_k$ genau dann, wenn $x \in A_{i_1,\dots,i_k}$, d.h.

$f^{-1}(p_k^{-1}(\{0\})) = C \cap A_{i_1,\dots,i_{k-1},0}$ und $f^{-1}(p_k^{-1}(\{1\})) = C \cap A_{i_1,\dots,i_{k-1},1}$.

Da sowohl C also auch jedes $A_{i_1,\dots,i_k}$ abgeschlossen ist, erkennen wir, dass das $(p_k \circ f)$-Urbild jeder (abgeschlossenen) Teilmenge von $\{0,1\}$ abgeschlossen ist. Folglich ist $p_k \circ f$ stetig (für jedes $k \in \mathbb{N}$) und somit auch f.

2) Stetigkeit von f^{-1}:

Sei A eine abgeschlossene Teilmenge von C. Wir überlegen uns, dass $\left(f^{-1}\right)^{-1}(A) = f(A)$ auch abgeschlossen ist.

C ist abgeschlossen (Bemerkung 5.10) und beschränkt und somit kompakt. Daher ist A kompakt (Satz 10.15) und folglich auch $f(A)$ (Satz 10.17). Da $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ein Hausdorffraum ist (Satz 11.13), folgt: $f(A)$ ist abgeschlossen (Satz 10.16).

Bemerkung 11.16 *Wenn* $\prod\limits_{i \in I} X_i$ *nicht leer und kompakt ist (bezüglich der Produkttopologie), dann sind auch alle* X_i *kompakt.*

Beweis: Sei $Y = \prod\limits_{i \in I} X_i$ kompakt. Da p_{i_0} stetig ist, ist auch $p_{i_0}(Y) = X_{i_0}$ kompakt (Satz 10.17). ■

Von der letzten Bemerkung gilt auch die Umkehrung. Das ist die Aussage des nächsten, ziemlich bedeutenden Satzes. Den entsprechenden Beweis lassen wir allerdings weg, da er relativ aufwändig ist.

Satz 11.17 (Tychonoff) *Das cartesische Produkt von kompakten topologischen Räumen ist (bezüglich der Produkttopologie) ebenfalls kompakt.*

Beispiel 11.18 *Die Menge* $[0,1]^{\mathbb{R}}$ *aller Funktionen* $\mathbb{R} \to [0,1]$ *ist bezüglich der Topologie der punktweisen Konvergenz kompakt, die Menge* $\mathbb{R}^{[0,1]}$ *aller Funktionen* $[0,1] \to \mathbb{R}$ *dagegen nicht (sonst müsste ja* $\mathbb{R}$ *kompakt sein).*

Beispiel 11.19 *Ein weiteres Beispiel stellt der Raum* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *dar. In diesem Fall wissen wir aber bereits, dass er kompakt ist, da er zum Cantor'sche Diskontinuum homöomorph ist (siehe Beispiel 11.15).*

Bemerkung 11.20 *Sei* X *eine beliebige Menge. Analog zur Produkttopologie kann man für eine beliebige Familie* Φ *von Abbildungen von* X *in einen topologischen Raum* Y *die kleinste Topologie betrachten, bezüglich der alle* $f \in \Phi$ *stetig sind. Diese heißt dann die von* Φ *erzeugte* ***schwache Topologie****. Das hat vor allem in der Funktionalanalysis Bedeutung, wo man für* Φ *die Menge aller (bezüglich der üblichen Topologie) stetigen linearen Funktionale nimmt.*

Kapitel 12

Zusammenhangseigenschaften

12.1 Zusammenhang

Definition 12.1 *Ein topologischer X Raum heißt* ***zusammenhängend*** *(kurz* ***zh.****), wenn es keine Zerlegung von X in zwei disjunkte offene Teilmengen gibt. Das heißt, es gibt keine offenen Teilmengen G_1, G_2 mit folgenden Eigenschaften: $X = G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, $G_1 \neq \emptyset$, $G_2 \neq \emptyset$.*

Bemerkung 12.2 *X ist genau dann zusammenhängend, wenn $\emptyset$ und X die einzigen Teilmengen sind, die zugleich offen und abgeschlossen sind.*

Beweis:
1) Seien G_1, G_2 offene Mengen mit $X = G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, $G_1 \neq \emptyset$, $G_2 \neq \emptyset$. Dann ist $G_1 = X \backslash G_2$ abgeschlossen und zugleich offen, und $G_1 \neq \emptyset$, $G_1 \neq X$.
2) Angenommen, es gibt eine Menge A mit $A \neq \emptyset$, $A \neq X$, die zugleich offen und abgeschlossen ist. Dann ist auch $X \backslash A$ offen und $\neq \emptyset$, $\neq X$, und $X = A \cup (X \backslash A)$, also X nicht zusammenhängend. ∎

Beispiel 12.3 *$\mathbb{R}$ mit der üblichen Topologie ist zusammenhängend.*

Beweis: Sei A eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$, $\emptyset \neq A \neq \mathbb{R}$. Wir zeigen: A ist nicht offen.
Sei $a \in A$ und $b \notin A$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $a < b$.
Sei $s := \sup\{t \in A : t < b\}$, also $a \leq s \leq b$.
Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $s - \varepsilon$ keine obere Schranke der Menge $\{t \in A : t < b\}$, also gibt es ein $t_\varepsilon \in A$ mit $t_\varepsilon < b$, sodass $s - \varepsilon < t_\varepsilon \leq s$. Es ist also $t_\varepsilon \in K_\varepsilon(s)$ und

folglich $K_\varepsilon(s) \cap \{t \in A : t < b\} \neq \emptyset$. Das gilt für jedes $\varepsilon > 0$, daher ist insbesondere $s \in \overline{A} = A$.

$s \leq b$ und $b \notin A$, also muss $s < b$ sein.

Angenommen, A ist offen. Dann ist s ein innerer Punkt von A, also gibt es ein $\delta > 0$, sodass $(s - \delta, s + \delta) \subset A$. Dann gibt es aber ein $t \in A$ mit $s < t < b$. Das ist ein Widerspruch zur Definition von s. ■

Beispiel 12.4 *$\mathbb{R}$ mit der RH-Topologie ist nicht zusammenhängend.*

Beweis: Jedes rechts halboffene Intervall $[a, b)$ ist in dieser Topologie sowohl offen als auch abgeschlossen (siehe Bemerkung 8.7). ■

Bemerkung 12.5 *Sei Y ein zusammenhängender Teilraum von X. Durch Weglassen von Randpunkten von Y kann der Zusammenhang von Y zerstört werden (Beispiel: zwei abgeschlossene Rechtecke, die nur eine Ecke gemeinsam haben). Durch Hinzufügung von Randpunkten kann der Zusammenhang jedoch nicht zerstört werden, wie der folgende Satz zeigt.*

Satz 12.6 *Wenn Y ein zusammenhängender Teilraum von X ist, dann ist auch jeder Teilraum Z mit $Y \subset Z \subset \overline{Y}$ zusammenhängend.*

Beweis: Angenommen, $Z = G_1 \cup G_2$ mit $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, $\quad G_i \neq \emptyset$ und G_i offen in Z für $i \in \{1, 2\}$.

Jedes Element von Z ist Berührungspunkt von Y, daher ist $G_i \cap Y \neq \emptyset$ für $i \in \{1, 2\}$.

$G_i \cap Y$ ist offen in Y, daher wäre $Y = (G_1 \cap Y) \cup (G_2 \cap Y)$ eine Zerlegung von Y in zwei offene Teile, Widerspruch. ■

Satz 12.7 *Das Bild eines zusammenhängenden topologischen Raumes unter einer stetigen Abbildung ist ebenfalls zusammenhängend.*

Beweis: Sei X zh. und f eine stetige Abbildung von X auf Y, also $Y = f(X)$.

Angenommen, $f(X) = G_1 \cup G_2$ mit $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, $\quad G_i \neq \emptyset$ und G_i offen in Y für $i \in \{1, 2\}$.

Dann ist $f^{-1}(G_i)$ offen (wegen der Stetigkeit von) und nicht leer (wegen der Surjektivität),

und $f^{-1}(G_1) \cap f^{-1}(G_2) = f^{-1}(G_1 \cap G_2) = \emptyset$. Es folgt: $X = f^{-1}(Y)$ ist unzusammenhängend. ■

Folgerung 12.8 *Jedes Intervall in $\mathbb{R}$ ist zusammenhängend (egal ob es offen, halboffen oder abgeschlossen ist).*

Beweis: Jedes offene Intervall ist homöomorph zu $\mathbb{R}$ (Übungsaufgabe) und daher nach dem vorigen Satz zusammenhängend. Die anderen Intervalle erhält man durch Hinzufügung von einem oder zwei Randpunkten. Nach Satz 12.6 sind sie daher ebenfalls zusammenhängend. ■

Bemerkung 12.9 *Wenn eine (nicht leere) Teilmenge Y von $\mathbb{R}$ mit je zwei Punkten auch alle dazwischen liegenden Punkte enthält, ist Y ein Intervall.*

Beweis: Sei $a = \inf Y$ und $b = \sup Y$. (Es kann sein, dass $a = -\infty$ und/oder $b = \infty$.)

Wenn $a < x < b$, dann $\exists y_1 \in Y : a \leq y_1 < x$, und $\exists y_2 \in Y : x < y_2 \leq b$.

Nach Voraussetzung muss dann $x \in Y$ sein, und es folgt $(a, b) \subset Y$.

Nach Definition von a und b können sich (a, b) und Y also höchstens durch die Punkte a und/oder b unterscheiden. Das heißt, Y ist gleich $(a, b), [a, b), (a, b]$ oder $[a, b]$. ■

Satz 12.10 *Die Intervalle sind die einzigen zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$.*

Beweis: Sei Y eine zh. Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Der Fall, dass Y nur aus einem Punkt y besteht, ist trivial: auch $[y, y]$ ist ein Intervall.

Angenommen, Y ist kein Intervall. Dann gibt es nach der vorhergehenden Bemerkung zwei Elemente y_1 und y_2 von Y, sodass nicht alle dazwischenliegenden Zahlen zu Y gehören. Es gibt also (o.B.d.A) ein $x \in \mathbb{R}\backslash Y$ mit $y_1 < x < y_2$.

Sei $A := [x, \infty) \cap Y$, das ist eine abgeschlossene Menge in der Spurtopologie.

Da $x \notin Y$, gilt aber auch $A = (x, \infty) \cap Y$, also ist A auch offen in der Spurtopologie.

$A \neq \emptyset$, da $y_2 \in A$, und $A \neq Y$, da $y_1 \in Y \backslash A$.

Also ist Y nicht zh.. ■

Satz 12.11 *Sei $(B_i)_{i \in I}$ eine Familie zusammenhängender Teilmengen von X. Wenn es ein $i_0 \in I$ gibt, sodass $B_i \cap B_{i_0} \neq \emptyset$ für alle $i \in I$, dann ist auch $\bigcup_{i \in I} B_i$ zusammenhängend.*

Beweis: Angenommen, es gibt eine Zerlegung von $\bigcup_{i \in I} B_i$ in zwei offene disjunkte nicht-leere Teilmengen G_1 und G_2. Für jedes $i \in I$ gilt entweder $B_i \subset G_1$ oder $B_i \subset G_2$, denn sonst wäre $B_i = (G_1 \cap B_i) \cup (G_2 \cap B_i)$ eine Zerlegung von B_i. Das gilt insbesondere für $i = i_0$.

Nehmen wir o.B.d.A. an, dass $B_{i_0} \subset G_1$. Dann folgt für alle $i \in I : B_i \subset G_1$, denn wäre $B_i \subset G_2$, so würde folgen: $B_{i_0} \cap B_i \subset G_1 \cap G_2 = \emptyset$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Also ist $\bigcup\limits_{i\in I} B_i \subset G_1$ und somit $G_2 = \emptyset$, Widerspruch. ■

Definition 12.12 *Sei (X, τ) ein beliebiger topologischer Raum. Unter der **Zusammenhangskomponente** (kurz **Zhk.**) eines Punktes $x \in X$ versteht man*

$$Z(x) := \bigcup_{\substack{x\in Y, \\ Y \text{ zh. } \subset X}} Y.$$

Bemerkung 12.13 *Nach dem vorhergehenden Satz ist $Z(x)$ zusammenhängend. $Z(x)$ ist also die größte zusammenhängende Menge, welche x enthält. Insbesondere gilt:*

$$Z(x) = X \Leftrightarrow X \text{ zh.}$$

Bemerkung 12.14 *Durch*

$$x \sim y := Z(x) = Z(y)$$

wird eine Äquivalenzrelation erklärt, und die zugehörigen Äquivalenzklassen sind gerade die Zusammenhangskomponenten.

Bemerkung 12.15 *$Z(x)$ ist stets abgeschlossen, denn sonst wäre $\overline{Z(x)}$ eine größere zusammenhängende Menge, welche x enthält. (Siehe Satz 12.6.)*

Definition 12.16 *Wenn für alle $x \in X : Z(x) = \{x\}$, dann heißt X **total unzusammenhängend**.*

Beispiel 12.17 *Die folgenden topologischen Räume sind total unzusammenhängend:*

1) $\mathbb{Q}$ mit der üblichen Topologie,

2) $\mathbb{R}$ mit der RH-Topologie,

3) das Cantor'sche Diskontinuum,

4) jede Menge mit der diskreten Topologie.

Beweis: Übungsaufgabe.

Definition 12.18 *Ein topologischer Raum heißt **lokal zusammenhängend**, wenn jeder Punkt eine Umgebungsbasis aus zusammenhängenden Mengen besitzt.*

Beispiel 12.19 *$\mathbb{R}$ ist lokal zusammenhängend, da hier die ε-Kugeln Intervalle und somit zusammenhängend sind.*

Das folgende Beispiel zeigt, dass nicht jeder zusammenhängende topologische Raum lokal zusammenhängend ist:

Beispiel 12.20 *Sei $X = [(0,0),(1,0)] \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} [(0,0),(1,\frac{1}{n})] \subset \mathbb{R}^2$ mit der Spurtopologie. Dann enthält $K_\varepsilon(x,0)$ für $0 < x < 1$ und $0 < \varepsilon < \min\{x, 1-x\}$ keine zusammenhängende Umgebung von $(x,0)$.*

(Dabei bezeichnet $[a,b]$ für $a,b,\in \mathbb{R}^2$ die Verbindungsstrecke von a und b.)

Satz 12.21 *Ein topologischer Raum X ist genau dann lokal zusammenhängend, wenn die Zusammenhangskomponenten der offenen Teilmengen von X offen sind (in X).*

Beweis:
1) Angenommen, alle Zhk. der offenen Teilmengen von X sind offen.
Sei U eine Umgebung von $x \in X$. Dann gibt es eine offene Menge G mit $x \in G \subset U$.
Sei $Z_G(x)$ die Zhk. von x in G (bezüglich der Spurtopologie).
Nach unserer Annahme ist $Z_G(x)$ offen, und es gilt $x \in Z_G(x) \subset G \subset U$. Also enthält U eine zh. Umgebung von x.
2) Nehmen wir nun an, dass X lokal zh. ist. Sei G eine offene Teilmenge von X, und Z_G eine Zhk. von G.
Wir zeigen, dass jeder Punkt von Z_G eine innerer Punkt ist.
Sei $x \in Z_G$. Dann ist $Z_G(x) = Z_G$. Da X lokal zh. ist, gibt es eine zh. Umgebung U_x von x mit $U_x \subset G$. $Z_G(x)$ ist die größte x enthaltende zh. Menge in G, also gilt $U_x \subset Z_G(x) = Z_G$. Folglich ist x ein innerer Punkt von Z_G. ■

Folgerung 12.22 *Jede nicht-leere offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist Vereinigung von abzählbar vielen paarweise disjunkten offenen Intervallen.*

Beweis: Sei G eine nicht-leere offene Teilmenge von $\mathbb{R}$. Die Zhk. von G sind offene Intervalle (nach dem vorigen Satz und Satz 12.10) und paarweise disjunkt (sie sind ja Äquivalenzklassen). Da jedes (nicht-leere) offene Intervall rationale Zahlen enthält, können wir jeder Zhk. Z von G eine rationale Zahl $q_z \in Z$ zuordnen. Diese Zuordnung ist offensichtlich injektiv. Da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, ist somit auch die Menge der Zhk. von G abzählbar. ■

12.2 Wegzusammenhang

Definition 12.23 *Eine stetige Abbildung $f : [0,1] \to X$ heißt* ***Weg*** *in X (manchmal auch* ***Kurve****). $f(0)$ und $f(1)$ heißen* ***Anfangspunkt*** *bzw.* ***Endpunkt*** *dieses Wegs.*

Bemerkung 12.24 *Wenn $f(0) = a$ und $f(1) = b$, so sagt man auch: f ist ein Weg von a nach b.*

Definition 12.25 *Ein topologischer Raum X heißt* ***wegzusammenhängend*** *(kurz* ***wegzh.****), wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ einen Weg f in X gibt mit x als Anfangspunkt und y als Endpunkt.*

Beispiel 12.26 *Jede konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist wegzusammenhängend.*

Beweis: Eine Teilmenge M des $\mathbb{R}^n$ heißt bekanntlich konvex, wenn sie mit je zwei Punkten x, y auch die Verbindungsstrecke

$$[x,y] := \{(1-\lambda)x + \lambda y : \lambda \in [0,1]\}$$

enthält. Hier ist also $f(\lambda) = (1-\lambda)x + \lambda y$. ■

Bemerkung 12.27 *Durch*

$$x \approx y :\Leftrightarrow \textit{es gibt einen Weg in } X \textit{ von } x \textit{ nach } y$$

wird eine Äquivalenzrelation erklärt.

Beweis: Z.B. sieht man die Transitivität so:

Angenommen, f_1 ist ein Weg von x nach y und f_2 ein Weg von y nach z. Dann kann man folgenderweise einen Weg von x nach z definieren:

$$f(t) := \begin{cases} f_1(2t) & \text{für } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ f_2(2t-1) & \text{für } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

■

Definition 12.28 *Die zu obiger Äquivalenzrelation $\approx$ gehörigen Äquivalenzklassen heißen die* ***Wegkomponenten*** *(kurz* ***Wegk.****) von X.*

Definition 12.29 *Wenn W eine Wegkomponente ist, so nennen wir die (eindeutig bestimmte) x enthaltende Wegkomponente die* ***Wegkomponente von*** *x. Bezeichnung: $W(x)$.*

Bemerkung 12.30 *Die Wegkomponenten sind wegzh., und zwar ist für jeden Punkt $x \in X$ die Wegk. von x die größte x enthaltende wegzh. Teilmenge von X.*

Beweis:

1) Seien $y, z \in W(x)$. Dann gibt es in X einen Weg f von y nach z. Wir überlegen uns, dass dieser Weg ganz in $W(x)$ liegt.

Sei z.B. $u \in f([0,1])$. Dann gibt es ein $s \in [0,1]$ mit $f(s) = u$, und die folgende Abbildung ist ein Weg von y nach u : $\widehat{f}(t) := f(ts)$. Daher ist $u \approx y$ und somit $u \in W(y) = W(x)$.

2) Wenn T irgendeine x enthaltende wegzh. Teilmenge von X ist, dann gibt es für jeden Punkt $z \in T$ einen Weg von x nach z, und daher ist $z \in W(x)$. Also folgt $T \subset W(x)$. ■

Satz 12.31 *Jeder wegzusammenhängende topologische Raum ist zusammenhängend.*

Beweis: Sei X wegzh. und $x_0 \in X$. Dann gibt es für jedes $x \in X$ einen Weg f_x von x nach x_0. Da $[0,1]$ zh., sind alle Mengen $f_x([0,1])$ zh.. Dann ist

$$X = \bigcup_{x \in X} f_x([0,1])$$

nach Satz 12.11 auch zh., da ja $x_0 = f_x(1) \in f_x([0,1])$ für alle $x \in X$. ■

Bemerkung 12.32 *Die Umkehrung dieses Satzes ist nicht richtig, wie folgendes Beispiel zeigt:*

$$Z := \{(0, \tfrac{1}{2})\} \cup [(-1,0),(2,0)] \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} [(\tfrac{1}{n},0),(\tfrac{1}{n},1)]$$

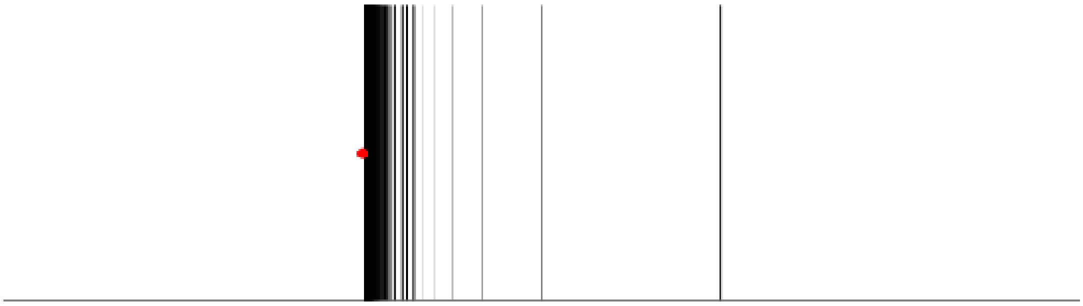
ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.

Beweis: $Z \backslash \{(0, \frac{1}{2})\}$ ist offensichtlich wegzh. und daher auch zh..

$(0, \frac{1}{2})$ ist eine Berührungspunkt von $Z \backslash \{(0, \frac{1}{2})\}$ und daher ist nach Satz 12.6 auch Z zh..

Es gibt aber keinen Weg von $(0, \frac{1}{2})$ zu irgendeinem Punkt von $Z \backslash \{(0, \frac{1}{2})\}$. ■

Hier ist der Versuch einer bildlichen Darstellung dieser Menge:



Bemerkung 12.33 *Dieses Beispiel zeigt auch, dass das Analogon von Satz 12.6 für wegzh. Teilräume nicht gilt.*

Definition 12.34 *Ein topologischer Raum heißt* ***lokal wegzusammenhängend****, wenn jeder Punkt eine Umgebungsbasis aus wegzusammenhängenden Mengen besitzt.*

Beispiel 12.35 *Jede offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist lokal wegzusammenhängend, denn jede offene ε-Kugel im $\mathbb{R}^n$ ist konvex und somit wegzusammenhängend.*

Satz 12.36 *In einem lokal wegzh. Raum sind die Wegkomponenten zugleich offen und abgeschlossen.*

Beweis:

1) Sei W eine Wegkomponente von X, und $x \in W$. Wenn X lokal wegzh. ist, dann gibt es jedenfalls eine wegzh. Umgebung U von x. Da W die größte x enthaltende wegzh. Menge ist, gilt $U \subset W$. Folglich besteht W nur aus inneren Punkten und ist somit offen.

2) $X \backslash W$ ist die Vereinigung aller von W verschiedenen Wegkomponenten und somit auch offen. ■

Satz 12.37 *In einem lokal wegzh. topologischen Raum stimmen die Zusammenhangskomponenten mit den Wegkomponenten überein.*

Beweis: Sei Z die Zusammenhangskomponente und W die Wegkomponente von $x \in X$. Da W nach Satz 12.31 zh. ist, gilt $W \subset Z$.

Nach vorigem Satz ist W offen und abgeschlossen in X und daher auch in Z. (Das folgt aus $W = W \cap Z$.)

Da Z zusammenhängend und $W \neq \emptyset$ ist, folgt $W = Z$. (Siehe Bemerkung 12.2.) ■

Folgerung 12.38 *Eine offene Teilmenge des* $\mathbb{R}^n$ *ist genau dann zusammenhängend, wenn sie wegzusammenhängend ist.*

Beweis: Jede offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist ja lokal wegzh. (Siehe Bemerkung 12.35). ■

Bemerkung 12.39 *Offene (weg-)zusammenhängende Teilmengen des* $\mathbb{R}^n$ *heißen auch **Gebiete**.*

Kapitel 13

Vollständige metrische Räume

13.1 Definition und grundlegende Eigenschaften

Definition 13.1 *Eine Folge (x_n) in einem metrischen Raum (X,d) heißt* ***Cauchy-Folge****, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für alle n und m, welche $\geq n_\varepsilon$ sind.*

Bemerkung 13.2 *Jede konvergente Folge in einem metrischen Raum ist eine Cauchyfolge.*

Beweis: Sei $x_n \to x$ in (X,d).
Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ für alle $n \geq n_0$.
Daher ist $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. ■

Definition 13.3 *Ein metrischer Raum (X,d) heißt* ***vollständig****, wenn in ihm jede Cauchy-Folge konvergiert.*

Beispiele:

1. $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ mit der üblichen Metrik sind bekanntlich vollständig.
2. Das offene Intervall $(-1,1)$ ist homöomorph zu $\mathbb{R}$ auf Grund der Abbildung

$$h : \mathbb{R} \to (-1,1) : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}.$$

(Siehe Beispiel 7 in Kapitel 7.)

$\mathbb{R}$ ist vollständig, aber $(-1,1)$ nicht, wie man z.B. an Hand der Folge $x_n := 1 - \frac{1}{n}$ sieht. Daraus erkennen wir, dass Vollständigkeit nicht invariant gegenüber

Homöomorphismen ist. Die Vollständigkeit ist also eigentlich keine topologische Eigenschaft. Trotzdem wird sie üblicherweise im Rahmen der Topologie behandelt.

3. $\mathbb{Q}$ (als Teilraum von $\mathbb{R}$ mit der üblichen Topologie) ist nicht vollständig. Das sieht man z.B., wenn man die Folge betrachtet, die der Dezimalbruchentwicklung der irrationalen Zahl $\sqrt{2}$ entspricht: $(1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142, \ldots)$. Diese Folge ist in $\mathbb{R}$ konvergent und daher eine Cauchyfolge, aber in $\mathbb{Q}$ konvergiert sie nicht.

Satz 13.4 *Jeder vollständige Teilraum eines metrischen Raumes X entspricht einer abgeschlossenen Teilmenge von X.*

Beweis: Sei $M \subset X$ und M vollständig (mit der auf $M \times M$ eingeschränkten Metrik).
Sei y ein Berührungspunkt von M in X. Dann gibt es eine Folge (x_n) in M mit $x_n \to y$.
Nach Bemerkung 13.2 ist (x_n) eine Cauchyfolge in M. Da M vollständig ist, konvergiert (x_n) in M. Wegen der Eindeutigkeit des Limes folgt $y \in M$. ■

Satz 13.5 *Jede abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes bildet einen vollständigen Teilraum.*

Beweis: Sei A eine abgeschlossene Teilmenge von X, und (x_n) eine Cauchyfolge in A. Dann ist (x_n) natürlich auch eine Cauchyfolge in X und besitzt daher einen Limes y in X. Nach Satz 9.12 ist y ein Berührungspunkt von A, und somit $y \in A$. ■

Satz 13.6 *Wenn in einem (nicht notwendig vollständigen) metrischen Raum eine Cauchyfolge eine konvergente Teilfolge hat, so konvergiert sie gegen deren Limes.*

Beweis: Sei (x_n) eine Cauchyfolge in X und $y = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$.
Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für alle $n, m > n_\varepsilon$, und es gibt ein $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass $d(x_{n_k}, y) < \varepsilon$ für $k \geq k_\varepsilon$.
Sei nun $k_0 > k_\varepsilon$ so, dass $n_{k_0} > n_\varepsilon$. Dann gilt für $n > n_\varepsilon$:
$d(x_n, y) \leq d(x_n, x_{n_{k_0}}) + d(x_{n_{k_0}}, y) < \varepsilon + \varepsilon$, also folgt $x_n \to y$. ■

Folgerung 13.7 *Jeder kompakte metrische Raum ist vollständig.*

Beweis: Sei X ein kompakter metrischer Raum. Dann ist X nach Satz 10.11 folgenkompakt. Daher besitzt insbesondere jede Cauchyfolge eine konvergente Teilfolge und konvergiert somit selbst. ■

Satz 13.8 *Ein metrischer Raum ist genau dann kompakt, wenn er vollständig und totalbeschränkt ist.*

Beweis: Wegen Bemerkung 10.8 und obiger Folgerung ist nur mehr eine Richtung zu zeigen.

Angenommen, (X, d) ist vollständig und totalbeschränkt, aber nicht kompakt.

Dann gibt es eine offene Überdeckung $(G_i)_{i\in I}$ von X, sodass keine endliche Teilfamilie davon X überdeckt.

Wir konstruieren nun rekursiv eine Folge von Kugeln B_n mit Radius $\frac{1}{2^n}$, sodass keine dieser Kugeln durch endlich viele G_i überdeckt werden kann.

$n = 0$: Da X totalbeschränkt ist, gibt es eine Überdeckung von X mit endlich vielen Kugeln vom Radius 1, sagen wir $X = \bigcup_{j=1}^{m_1} K_1(x_j^{(0)})$.

Da X nicht durch endlich viele G_i überdeckt werden kann, gibt es einen Index j_1, sodass auch $K_1(x_{j_1}^{(0)})$ nicht durch endlich viele G_i überdeckt werden kann. Wir setzen $B_0 := K_1(x_{j_1}^{(0)})$.

$n-1 \Rightarrow n$: Angenommen, $B_0, \ldots, B_{n-1}$ sind schon so definiert, wie angegeben. Da X totalbeschränkt ist, gibt es eine Überdeckung von X mit endlich vielen Kugeln vom Radius $\frac{1}{2^n}$, sagen wir $X = \bigcup_{j=1}^{m_n} K_{1/2^n}(x_j^{(n)})$. Dann gilt

$$\bigcup_{j=1}^{m_n} \Big(K_{1/2^n}(x_j^{(n)}) \cap B_{n-1}\Big) = B_{n-1}.$$

Mindestens einer dieser Durchschnitte kann nicht durch endliche viele G_i überdeckt werden, da sonst B_{n-1} durch endlich viele G_i überdeckt werden könnte. Sei j_n der entsprechende Index. Dann setzen wir $B_n := K_{1/2^n}(x_{j_n}^{(n)})$.

Die Konstruktion liefert also sogar noch etwas mehr, als wir verlangt haben: $B_n \cap B_{n-1}$ kann nicht durch endlich viele G_i überdeckt werden. Insbesondere ist $B_n \cap B_{n-1} \neq \emptyset$ und daher $d(x_{j_{n-1}}^{(n-1)}, x_{j_n}^{(n)}) \leq \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n-2}}$. Somit gilt für $n \leq m$:

$d(x_{j_n}^{(n)}, x_{j_m}^{(m)}) \leq \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \ldots + \frac{1}{2^{m-2}} < \frac{1}{2^{n-2}}$.

Es folgt: $(x_{j_n}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge. Sei a der Limes davon.

Es gibt eine $i_0 \in I$, sodass $a \in G_{i_0}$.

Da G_{i_0} offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $K_\varepsilon(a) \subset G_{i_0}$.

Wegen $x_{j_n}^{(n)} \to a$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $d(x_{j_n}^{(n)}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ und $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Es folgt: $B_n = K_{1/2^n}(x_{j_n}^{(n)}) \subset K_{\varepsilon/2}(x_{j_n}^{(n)}) \subset K_\varepsilon(a) \subset G_{i_0}$.

Das ist Widerspruch dazu, dass B_n nicht durch endlich viele G_i überdeckt werden kann. ■

Der folgende Satz gibt ein wichtiges Beispiel eines vollständigen metrischen Raumes an.

Satz 13.9 *Sei Y eine beliebige nicht-leere Menge. Die Menge $\mathcal{B}(Y)$ aller beschränkten Funktionen $Y \to \mathbb{R}$ mit der Supremumsmetrik (siehe Beispiel 5 in Kapitel 1) ist vollständig.*

Beweis: Sei (f_n) eine Cauchyfolge in $\mathcal{B}(Y)$ und $\varepsilon > 0$.

Dann gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass $d(f_n, f_m) < \varepsilon$ für $n, m \geq n_\varepsilon$.

Das heißt, $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ für $n, m \geq n_\varepsilon$ und alle $x \in Y$.

Folglich ist $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ für jedes $x \in Y$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, existiert $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für jedes $x \in Y$, und diesen Limes bezeichnen wir mit $f(x)$. Auf diese Weise wird eine Funktion $f : Y \to \mathbb{R}$ definiert. Diese Funktion ist ebenfalls beschränkt:

$|f_n(x) - f_{n_\varepsilon}(x)| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$,

also ist $\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f_{n_\varepsilon}(x)| = |f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)| \leq \varepsilon$,

folglich $|f(x)| \leq |f_{n_\varepsilon}(x)| + \varepsilon$.

Da f_{n_ε} beschränkt ist, ist also auch f beschränkt.

$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$,

also $d(f_n, f) \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$, und es folgt: $f_n \to f$. ■

Bemerkung 13.10 *Genauso sieht man, dass die Menge aller beschränkten Funktionen $Y \to \mathbb{C}$ mit der Supremumsmetrik vollständig ist.*

Bemerkung 13.11 *Die Konvergenz von Funktionen bezüglich der Supremums-Metrik heißt* ***gleichmäßige Konvergenz****. Sie impliziert die punktweise Konvergenz, aber nicht umgekehrt.*

Ein weiteres wichtiges Beispiel:

Definition 13.12 *Sei X ein topologischer Raum. Mit $\mathcal{C}^b(X)$ bezeichnen wir die Menge aller beschränkten stetigen Funktionen $X \to \mathbb{R}$.*

(Für Funktionen $X \to \mathbb{C}$ geht wieder alles analog.)

Satz 13.13 *$\mathcal{C}^b(X)$ ist bezüglich der Supremumsmetrik ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{B}(X)$ und daher auch vollständig.*

Beweis: Sei f ein Berührungspunkt von $\mathcal{C}^b(X)$ in $\mathcal{B}(X)$. Dann gibt es eine Folge (f_n) in $\mathcal{C}^b(X)$, welche (gleichmäßig) gegen f konvergiert. Es ist zu zeigen, dass f stetig ist.
Sei $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Es gibt ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass $d(f_n, f) < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $n \geq n_\varepsilon$.
Sei $U := f_{n_\varepsilon}^{-1}(K_{\varepsilon/3}(f_{n_\varepsilon}(x)))$. Das ist eine Umgebung von x, da f_{n_ε} stetig ist.
Wenn $y \in U$, dann ist also $|f_{n_\varepsilon}(y) - f_{n_\varepsilon}(x)| < \varepsilon/3$
und somit $|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - f_{n_\varepsilon}(y)| + |f_{n_\varepsilon}(y) - f_{n_\varepsilon}(x)| + |f_{n_\varepsilon}(x) - f(x)| \leq$
$\leq d(f, f_{n_\varepsilon}) + \varepsilon/3 + d(f, f_{n_\varepsilon}) < \varepsilon$.
Es folgt: $U \subset f^{-1}(K_\varepsilon(f(x)))$, und daher ist auch $f^{-1}(K_\varepsilon(f(x)))$ eine Umgebung von x, was zu zeigen war. ■

Bemerkung 13.14 *Bezüglich der Topologie der punktweisen Konvergenz ist $\mathcal{C}^b(\mathbb{R})$ nicht abgeschlossen in $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Beweis: Zum Beweis betrachten wir die folgenden beschränkten stetigen Funktionen:
$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } \; x \leq 0, \\ nx & \text{für } \; 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{für } \; \frac{1}{n} \leq x, \end{cases}$$
sowie die unstetige Funktion
$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } \; x \leq 0, \\ 1 & \text{für } \; 0 < x. \end{cases}$$
Offensichtlich konvergiert $f_n(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ gegen $f(x)$. Daher ist f ein Berührungspunkt von $\mathcal{C}^b(\mathbb{R})$ bezüglich der Topologie der punktweisen Konvergenz. Aber $f \notin \mathcal{C}^b(\mathbb{R})$. ■

Bemerkung 13.15 *Wenn X kompakt ist, dann ist $\mathcal{C}^b(X) = \mathcal{C}(X)$, denn jede stetige Funktion mit kompaktem Definitionsbereich ist beschränkt.*

Beweis: Sei X kompakt und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(X)$ kompakt und daher beschränkt (siehe Bemerkung 10.8). ■

13.2 Gleichmäßige Stetigkeit

Nach Beispiel 2 ist Vollständigkeit nicht invariant gegenüber Homöomorphismen. Man braucht dazu eine stärkere Stetigkeitseigenschaft:

Definition 13.16 *Seien (X, d) und (X', d') metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to X'$ heißt* ***gleichmäßig stetig****, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $x, y \in X$ gilt:*
$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Der Unterschied zur gewöhnlichen Stetigkeit besteht darin, dass hier das δ unabhängig von x und y ist.

Beispiel 13.17 *Jede Funktion, die eine Lipschitz-Bedingung erfüllt, ist gleichmäßig stetig.*

Beweis: Siehe Beispiel 7.6 aus Kapitel 7. ∎

Beispiel 13.18 *Die Funktion $h : \mathbb{R} \to (-1,1) : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ ist gleichmäßig stetig, ihre Umkehrfunktion aber nicht.*

Beweis: Übungsaufgabe. ∎

Satz 13.19 *Seien (X,d) und (X',d') metrische Räume. Wenn X kompakt ist, dann ist jede stetige Abbildung von X nach X' gleichmäßig stetig.*

Beweis: Angenommen, $f : X \to X'$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass es für alle $n \in \mathbb{N}$ Elemente x_n und y_n von X gibt mit

$$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon.$$

X ist folgenkompakt, also gibt es eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n). Sei $a = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$.
$d(y_{n_k}, a) \leq d(y_{n_k}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a)$.
Beide Summanden gehen offensichtlich gegen Null, also konvergiert auch (y_{n_k}) gegen a.
Wegen der Stetigkeit von f konvergieren daher $(f(x_{n_k}))$ und $(f(y_{n_k}))$ gegen $f(a)$, und folglich gibt es ein k_0, sodass $d'(f(x_{n_{k_0}}), f(y_{n_{k_0}})) < \varepsilon$, ein Widerspruch. ∎

Satz 13.20 *Ein gleichmäßig stetiges Bild einer Cauchyfolge ist ebenfalls eine Cauchyfolge.*

Beweis: Sei $f : X \to X'$ gleichmäßig stetig und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ sodass gilt: $d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.
Sei nun (x_n) eine Cauchyfolge in X. Dann gibt es zu so einem δ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x_m) < \delta$, also $d'(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$ für $n, m \geq n_0$. Das heißt, $(f(x_n))$ ist auch eine Cauchyfolge. ∎

Satz 13.21 *Sei X ein vollständiger und X' ein beliebiger metrischer Raum, und $f : X \to X'$ sei ein Homöomorphismus. Wenn f^{-1} gleichmäßig stetig ist, dann ist auch X' vollständig.*

Beweis: Sei (x'_n) eine Cauchyfolge in X' und $x_n := f^{-1}(x'_n)$. Wenn f^{-1} gleichmäßig stetig ist, dann ist nach dem vorigen Satz auch (x_n) eine Cauchyfolge. Da X vollständig ist, gibt es ein $a \in X$ mit $x_n \to a$. Wegen der Stetigkeit von f folgt daraus $x'_n \to f(a)$. ■

Bemerkung 13.22 *Vollständigkeit ist also invariant gegenüber Homöomorphismen, die in beiden Richtungen gleichmäßig stetig sind.*

13.3 Der Banach'sche Fixpunktsatz

Definition 13.23 *Sei T eine Abbildung $X \to X$. Wenn $T(x) = x$,so heißt x **Fixpunkt** von T.*

Ein Fixpunkt ist also eine Lösung der Gleichung $T(x) = x$.

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, kann man zeigen, dass jede stetige Abbildung einer abgeschlossenen Kugel des $\mathbb{R}^n$ in sich einen Fixpunkt hat (Fixpunktsatz von Brouwer). Es gibt noch einen anderen sehr bekannten Fixpunktsatz, der wesentlich einfacher zu beweisen ist. Dieser bezieht sich allerdings nur auf sehr spezielle stetige Abbildungen, gilt dafür aber allgemeiner in jedem vollständigen metrischen Raum und beinhaltet außerdem eine Eindeutigkeitsaussage sowie ein Verfahren zur Berechnung des Fixpunkts.

Definition 13.24 *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Abbildung $T : X \to X$ heißt **Kontraktion**, wenn es eine reelle Zahl $c < 1$ gibt, sodass $d(T(x), T(y)) \leq c \cdot d(x, y)$ für alle $x, y \in X$.*

Das heißt also, dass T eine Lipschitz-Bedingung mit einer Konstanten < 1 erfüllt (siehe Beispiel 7.6).

c muss natürlich ≥ 0 sein.

Satz 13.25 (Fixpunktsatz von Banach) *In einem vollständigen metrischen Raum X hat jede Kontraktion T genau einen Fixpunkt y, und dieser lässt sich folgenderweise approximieren: Sei x_0 beliebig $\in X$ und $x_{n+1} := T(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ("Iteratonsverfahren"). Dann ist $y = \lim x_n$, und es gilt folgende "Fehlerabschätzung" (mit obigem c):*

$$d(x_n, y) \leq \frac{c^n}{1-c} d(x_0, T(x_0)).$$

Beweis:
1) (x_n) ist eine Cauchyfolge:
$d(x_n, x_{n+1}) = d(T(x_{n-1}), T(x_n)) \leq c \cdot d(x_{n-1}, x_n)$ für $n \geq 1$.
Daraus folgt mit Induktion: $d(x_n, x_{n+1}) \leq c^n \cdot d(x_0, x_1)$.
Für $p \geq 1$ gilt daher auf Grund der Dreiecksungleichung
$d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leq$
$\leq (c^n + c^{n+1} + \ldots + c^{n+p-1}) \cdot d(x_0, x_1) < \frac{c^n}{1-c} \cdot d(x_0, T(x_0))$,
und das ist für genügend große n kleiner als jedes vorgegebene $\varepsilon > 0$.
Wegen der Vollständigkeit von (X, d) konvergiert daher (x_n). Sei $y := \lim x_n$.
Wegen der Stetigkeit von T gilt $T(y) = \lim T(x_n) = \lim x_{n+1} = y$, also ist y ein Fixpunkt von T.

2) Eindeutigkeit des Fixpunkts:
Angenommen, y' wäre ein anderer Fixpunkt. Dann wäre $d(y, y') = d(T(y), T(y')) \leq c \cdot d(y, y')$. Wegen $c < 1$ ist das nur für $d(y, y') = 0$ möglich, das heißt $y' = y$.

3) Die Fehlerabschätzung folgt sofort aus der obigen Ungleichung $d(x_n, x_{n+p}) < \frac{c^n}{1-c} \cdot d(x_0, T(x_0))$ mit $p \to \infty$. ■

Beispiel 13.26 *Sei $f \in \mathcal{C}([a,b])$ und $K \in \mathcal{C}([a,b]^2)$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$.*
Gesucht sei eine Funktion $x \in \mathcal{C}([a,b])$, welche folgende Gleichung erfüllt:

$$x(t) = \lambda \int_a^b K(t, s)\ x(s)\ ds + f(t).$$

("Fredholmsche Integralgleichung 2. Art"). Sei

$$M := \max_{(t,s) \in [a,b]^2} |K(t, s)|\,.$$

Dann gibt es für jedes λ mit $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ genau eine Lösung obiger Gleichung.

Bemerkung: Das ist ein kontinuierliches Analogon zu einem linearen Gleichungssystem der Form $x = \lambda A x + b$. Für $b = 0$ bzw. $f = 0$ handelt es sich also um ein Eigenwertproblem (zum Eigenwert $1/\lambda$).
Beweis: Wir betrachten die Abbildung $T : \mathcal{C}([a,b]) \to \mathcal{C}([a,b])$ mit

$$T(x)(t) := \lambda \int_a^b K(t, s)\ x(s)\ ds + f(t).$$

Dann geht es also um die Gleichung $x = T(x)$, und diese hat unter der angegebenen Bedingung genau eine Lösung, weil dann T eine Kontraktion ist:

$d(T(x), T(y)) = \sup_{t\in[a,b]} \left| \lambda \int\limits_a^b K(t,s)\ (x(s) - y(s))\ ds \right| \leq |\lambda|\,(b-a)M \cdot d(x,y) = c \cdot d(x,y)$ mit $c := |\lambda|\,(b-a)M < 1$.

Die Lösung kann dann iterativ approximiert werden, wie im Banach'schen Fixpunktsatz angegeben. ■

Kapitel 14

Die Baire'schen Kategorien

Definition 14.1 *Eine Teilmenge M eines topologischen Raums X heißt **nirgends dicht** (in X), wenn $\overline{M}$ keine inneren Punkte besitzt.*

Beispiel 14.2 *Sei M eine Vereinigung von endlich vielen Geraden oder Punkten im $\mathbb{R}^n$. Dann ist M nirgends dicht. (In diesem Fall ist $M = \overline{M}$.)*

Definition 14.3 *Eine Teilmenge M eines topologischen Raums X heißt **mager** oder **von erster Kategorie** (in X), wenn M Vereinigung von abzählbar vielen nirgends dichten Teilmengen ist. Andernfalls heißt M **von zweiter Kategorie**.*

Intuitiv kann man sich daher Mengen erster Kategorie als "klein" und Mengen zweiter Kategorie als "groß" vorstellen. Es gibt allerdings viele Beispiele, wo diese Vorstellung der "naiven" Intuition widerspricht. (Siehe z.B. weiter unten Satz 14.13).

Beispiel 14.4 *$\mathbb{Q}$ ist abzählbar und daher mager in $\mathbb{R}$, jedoch nicht nirgends dicht, da ja $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.*

Bemerkung 14.5 *Die Vereinigung von zwei (oder abzählbar vielen) mageren Teilmengen von X ist ebenfalls mager.*

Definition 14.6 *Ein topologischer Raum heißt **Baire'scher Raum**, wenn er von zweiter Kategorie ist.*

Wenn X ein Baire'scher Raum ist und M eine magere Teilmenge von X, dann ist also das Komplement von M von zweiter Kategorie. (Sonst wäre X die Vereinigung der zwei mageren Teilmengen M und $X \backslash M$ und somit auch mager.)

$\mathbb{Q}$ ist mit der üblichen Topologie kein Baire'scher Raum ($\mathbb{Q}$ ist ja Vereinigung von abzählbar vielen einelementigen Teilmengen), $\mathbb{R}$ dagegen schon, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 14.7 *Jeder vollständige metrische Raum ist ein Baire'scher Raum.*

Dazu brauchen wir zunächste einige Hilfsüberlegungen:

Definition 14.8 *Sei (X, d) ein metrischer Raum, $a \in X$ und $\varepsilon > 0$. Dann heißt $\bar{K}_\varepsilon(a) := \{x \in X : d(x, a) \leq \varepsilon\}$ die **abgeschlossene ε-Kugel** mit Mittelpunkt a.*

Bemerkung 14.9 *$\overline{K_\varepsilon(a)} \subset \bar{K}_\varepsilon(a)$, aber im Allgemeinen gilt nicht Gleichheit.*

Beweis: Übungsaufgabe.

Lemma 14.10 *Sei M eine nirgends dichte Teilmenge von X, und $x \in X$. Dann gibt es zu jeder offenen ε-Kugel $K_\varepsilon(x)$ ein $y \in X$ und ein $\delta > 0$, sodass*

$$\bar{K}_\delta(y) \subset K_\varepsilon(x)$$

$$\bar{K}_\delta(y) \cap M = \emptyset.$$

Das heißt also: Jede offene Kugel enthält eine zu M disjunkte abgeschlosse Kugel.

Beweis: Sei $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Da M nirgends dicht ist, ist x sicher kein innerer Punkt von $\overline{M}$ und somit $K_\varepsilon(x) \nsubseteq \overline{M}$. Folglich gibt es ein $y \in K_\varepsilon(x) \backslash \overline{M}$. Da $X \backslash \overline{M}$ offen ist, muss y ein innerer Punkt von $K_\varepsilon(x) \backslash \overline{M}$ sein. Also gibt es ein $\eta > 0$ mit $K_\eta(y) \subset K_\varepsilon(x) \backslash \overline{M}$. Mit $\delta := \eta/2$ folgt $\bar{K}_\delta(y) \subset K_\eta(y) \subset K_\varepsilon(x) \backslash \overline{M}$, also $\bar{K}_\delta(y) \cap \overline{M} = \emptyset$ und daher erst recht $\bar{K}_\delta(y) \cap M = \emptyset$. ∎

Lemma 14.11 ("Schachtelsatz") *In dem vollständigen metrischen Raum (X, d) sei $(\bar{K}_{\varepsilon_n}(a_n))$ eine Folge abgeschlossener Kugeln mit*

$$\bar{K}_{\varepsilon_{n+1}}(a_{n+1}) \subset \bar{K}_{\varepsilon_n}(a_n) \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und

$$\varepsilon_n \to 0.$$

Dann besteht der Durchschnitt dieser Kugeln aus genau einem Punkt, und dieser ist gleich dem Limes der Folge (a_n).

Beweis:
Nach Voraussetzung gilt $d(a_n, a_{n+p}) \leq \varepsilon_n$ für alle $p \in \mathbb{N}$.
Da $\varepsilon_n \to 0$, folgt: (a_n) ist eine Cauchyfolge. Sei $y := \lim a_n$.
Dann ist $d(a_n, y) = \lim_{p\to\infty} d(a_n, a_{n+p}) \leq \varepsilon_n$ (für alle $n \in \mathbb{N}$) und somit $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{K}_{\varepsilon_n}(a_n)$.

Angenommen, es gibt noch einen zweiten Punkt y' aus diesem Durchschnitt. Dann wäre $d(y,y') \leq d(y,a_n) + d(y',a_n) \leq \varepsilon_n + \varepsilon_n \to 0$, also $d(y,y') = 0$ und somit $y' = y$, Widerspruch. ■

Beweis von Satz 14.7:

Angenommen, $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ mit nirgends dichten Teilmengen M_n.

Sei $\bar{K}_{\varepsilon_0}(a_0)$ eine beliebige abgeschlossene Kugel mit Radius $\varepsilon_0 \in (0,1)$.

Nach Lemma 14.10 gibt es ein $a_1 \in X$ und ein $\varepsilon_1 \in (0, \frac{1}{2})$, sodass

$$\bar{K}_{\varepsilon_1}(a_1) \subset \bar{K}_{\varepsilon_0}(a_0) \quad \text{und} \quad \bar{K}_{\varepsilon_1}(a_1) \cap M_1 = \emptyset.$$

Mit vollständiger Induktion erkennt man, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in X$ und ein $\varepsilon_n \in (0, \frac{1}{2^n})$ gibt, sodass

$$\bar{K}_{\varepsilon_n}(a_n) \subset \bar{K}_{\varepsilon_{n-1}}(a_{n-1}) \quad \text{und} \quad \bar{K}_{\varepsilon_n}(a_n) \cap M_n = \emptyset.$$

Nach obigem "Schachtelsatz" gibt es ein $y \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bar{K}_{\varepsilon_n}(a_n)$. Dieses y kann dann in keinem M_n enthalten sein, also $y \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n = X$, und das ist ein Widerspruch zu $y \in X$. ■

Es gibt noch eine andere wichtige Klasse von Baire'schen Räumen. Auf den entsprechenden Beweis verzichten wir aber hier:

Satz 14.12 *Jeder lokal kompakte Hausdorffraum ist ein Baire'scher Raum.*

Die Tatsache, dass jeder vollständige metrische Raum (und daher insbesondere $\mathcal{C}[0,1]$) von zweiter Kategorie ist, kann man z.B. benützen, um zu zeigen, dass in gewissem Sinne die meisten stetigen Funktionen $[0,1] \to \mathbb{R}$ nirgends differenzierbar sind. Es gilt nämlich sogar:

Satz 14.13 *Sei M_r die Menge der Funktionen aus $\mathcal{C}[0,1]$, die in mindestens einem Punkt eine rechtsseitige Ableitung besitzen. Dann ist M_r mager in $\mathcal{C}[0,1]$.*

Beweis: Für $f \in \mathcal{C}[0,1]$ und $t \in [0,1]$ sei

$$A(f,t) := \sup_{h \in (0,1)} \left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \right|,$$

wobei $t+h$ modulo 1 zu verstehen ist, d.h. für $t+h > 1$ ist stattdessen $t+h-1$ zu denken.

Wenn f in $t \in [0,1)$ rechtsseitig differenzierbar ist, dann ist $A(f,t) < \infty$.

(Beweis dieser Aussage: Sei $s := \lim_{h\to+0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, sodass für $0 < h < \delta$

$$\left|\frac{f(t+h)-f(t)}{h} - s\right| < \varepsilon \text{ und daher } \left|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right| < |s| + \varepsilon.$$

f ist stetig und daher beschränkt, d.h. es gibt ein $m \in R$, sodass $|f(x)| \leq m$ für alle $x \in [0,1]$ und folglich für $h \geq \delta$

$$\left|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right| \leq \frac{2m}{\delta}.$$

Also ist $A(f,t) \leq \max\{|s| + \varepsilon, \frac{2m}{\delta}\}$.)

Sei nun (für $k \in \mathbb{N}$)

$$N_k := \{f \in \mathcal{C}[0,1] : \exists\ t_0 \in [0,1] : A(f,t_0) \leq k\}.$$

Wenn f an mindestens einer Stelle von $[0,1]$ rechtsseitig differenzierbar ist, dann gibt es nach Obigem ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $f \in N_k$, also ist

$$M_r \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k.$$

Wir zeigen nun, dass die N_k nirgends dicht sind. (Dann sind wir fertig.)

Betrachten wir dazu ein festes $k \in \mathbb{N}$ und erinnern uns daran, dass wir in $\mathcal{C}[0,1]$ die Supremumsmetrik d zugrunde legen (siehe Beispiel 6 in Kapitel 1).

a) N_k ist abgeschlossen:

Sei f ein Berührungspunkt von N_k. Wir müssen zeigen, dass $f \in \mathbb{N}_k$ ist.

Es gibt eine Folge (f_n) in N_k mit $f_n \to f$ bezüglich der Supremumsmetrik (Satz 9.12), und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $t_n \in [0,1]$ mit $A(f_n,t_n) \leq k$.

Die Folge (t_n) besitzt in $[0,1]$ eine konvergente Teilfolge (t_{n_i}) (siehe Bemerkung 10.13). Sei $t_0 := \lim_{i\to\infty} t_{n_i}$ und h eine feste Zahl aus $(0,1)$.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $i_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass

$\sup_{t\in[0,1]} |f_{n_i}(t) - f(t)| < \varepsilon$ und $|f(t_{n_i}) - f(t_0)| < \varepsilon$ für alle $i \geq i_\varepsilon$.

Wir können außerdem i_ε so wählen, dass $|t_{n_i} - t_0| < \min\{\varepsilon, h, 1-h\}$ für $i \geq i_\varepsilon$.

Wir setzen $h_i := h + t_0 - t_{n_i}$. Für $i \geq i_\varepsilon$ ist dann

$h_i \in (0,1)$, $t_{n_i} + h_i = t_0 + h$, $|h - h_i| = |t_{n_i} - t_0| < \varepsilon$, und somit $h_i < h + \varepsilon$.

Wegen $A(f_{n_i}, t_{n_i}) \leq k$ ist $|f_{n_i}(t_{n_i} + h_i) - f_{n_i}(t_{n_i})| \leq h_i k \leq (h+\varepsilon)k$.

Mit der Dreiecksungleichung folgt daher (unter Berücksichtigung von $t_{n_i} + h_i = t_0 + h$):
$|f(t_0 + h) - f(t_0)| \leq$
$\leq |f(t_0 + h) - f_{n_i}(t_0 + h)| + |f_{n_i}(t_{n_i} + h_i) - f_{n_i}(t_{n_i})| + |f_{n_i}(t_{n_i}) - f(t_{n_i})| + |f(t_{n_i}) - f(t_0)| \leq$
$\leq \varepsilon + (h + \varepsilon)k + \varepsilon + \varepsilon.$
Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, heißt das $|f(t_0 + h) - f(t_0)| \leq hk$.
Das gilt für jedes $h \in (0, 1)$, also folgt $A(f, t_0) \leq k$, d.h. $f \in N_k$.
b) Sei p eine Polynomfunktion $\in \mathcal{C}[0, 1]$ und $\varepsilon > 0$.
Dann kann man folgenderweise eine Funktion $f \in \mathcal{C}[0, 1]$ konstruieren, welche nicht zu N_k gehört, sodass $d(f, p) < \varepsilon$:
Die 1. Ableitung p' von p ist auch eine Polynomfunktion und daher beschränkt, sagen wir $|p'(x)| \leq L$ für alle $x \in [0, 1]$. Dann folgt aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung, dass p eine Lipschitzbedingung mit Konstante L erfüllt. Wir konstruieren nun f so, dass wir ausgehend vom Graphen von p eine Zickzack-Linie bilden, die abwechselnd eine Steigung $> \max\{L, k\}$ und $< -\max\{L, k\}$ hat. Dann ist jedenfalls $f \notin N_k$. Jede zweite Ecke dieser Zickzack-Linie soll auf dem Graphen von f liegen. Wenn wir die Zacken genügend klein wählen, erreichen wir $d(f, p) < \varepsilon$.
c) Angenommen, g ist ein innerer Punkt von $N_k = \overline{N_k}$.
Dann gibt es ein $\delta > 0$, sodass $K_\delta(g) \subset N_k$.
Nach dem Approximationssatz von Weierstraß (vgl. Beispiel 4.15) gibt es eine Polynomfunktion $p \in \mathcal{C}[0, 1]$ mit $d(p, g) < \frac{\delta}{2}$.
Nach b) gibt es ein $f \in \mathcal{C}[0, 1] \backslash N_k : d(f, p) < \frac{\delta}{2}$.
Daher ist $d(f, g) < \delta$, also $f \in K_\delta(g) \subset N_k$ im Widerspruch zu $f \notin N_k$. ■
Damit haben wir also die Existenz von stetigen nicht differenzierbaren Funktion auf $[0, 1]$ gezeigt, und sogar, dass es "sehr viele" solche Funktionen gibt. Es ist aber nicht ganz leicht, auch nur eine solche Funktion konkret anzugeben.
Das folgende Beispiel einer solchen Funktion ist vielleicht das einfachste bisher bekannte. Es stammt von *B.L. van der Waerden.*
Für dieses Beispiel verwenden wir folgende Notation:
Für $x \in \mathbb{R}$ sei

$$\{x\} := \min\{x - \lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil - x\},$$

wobei $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl $\leq x$ bedeutet, und $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl $\geq x$.
$\{x\}$ ist also der Abstand von x zur nächstliegenden ganzen Zahl.
Wir behaupten nun, dass die folgenderweise definierte Funktion f auf $[0, 1]$ stetig, aber in keinem Punkt differenzierbar ist:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^n x\}}{10^n}.$$

(Versuchen Sie die Graphen der ersten beiden Summanden dieser Reihe aufzuzeichnen!)

Diese Reihe ist gleichmäßig konvergent, weil $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n}$ eine konvergente Majorante ist. Da die einzelnen Summanden stetig sind, ist somit auch f stetig (vgl. Satz 13.13).

Wir können f auch als Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ auffassen. Dann ist sie periodisch mit Periode 1. Wegen dieser Periodizität genügt es, wenn wir zeigen, dass f in keinem Punkt von $[0,1)$ differenzierbar ist.

Angenommen, f ist in $x_0 \in [0,1)$ differenzierbar.

Sei $(0, a_1, a_2, \ldots)$ die Dezimalbruchentwicklung von x_0, und

$$\varepsilon_k := \begin{cases} -1 & \text{für} \quad a_k = 4 \text{ oder } 9, \\ 1 & \text{sonst}, \end{cases}$$

und

$$h_k := \frac{\varepsilon_k}{10^k}.$$

Da f in x_0 differenzierbar ist, müsste $\lim_{k\to\infty} \frac{f(x_0+h_k)-f(x_0)}{h_k}$ existieren.

Andererseits gilt für festes k (man beachte $\frac{1}{\varepsilon_k} = \varepsilon_k$):

$$\frac{f(x_0+h_k)-f(x_0)}{h_k} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_k 10^k \frac{\{10^n(x_0+\frac{\varepsilon_k}{10^k})\} - \{10^n x_0\}}{10^n}.$$

Für $n \geq k$ ist $\{10^n(x_0+\frac{\varepsilon_k}{10^k})\} = \{10^n x_0 + \varepsilon_k 10^{n-k}\} = \{10^n x_0\}$, da $\varepsilon_k 10^{n-k} \in \mathbb{Z}$.

Alle Summanden dieser Reihe mit $n \geq k$ sind somit $= 0$.

Für $n < k$ ergibt sich:

$$\{10^n(x_0+\frac{\varepsilon_k}{10^k})\} = \{10^n x_0 + \frac{\varepsilon_k}{10^{k-n}}\} = \{10^n x_0\} \pm \frac{1}{10^{k-n}}. \qquad (*)$$

(Die Herleitung dieser Gleichung erfolgt weiter unten.)

Für $n < k$ ist daher jeder Summand der Reihe gleich 1 oder -1.

$\sum_{n=0}^{k-1}(\pm 1) \equiv \sum_{n=0}^{k-1} 1 = k \mod 2$, daher ist $\frac{f(x_0+h_k)-f(x_0)}{h_k}$ für $k = 1,2,3,\ldots$ abwechselnd eine ungerade und eine gerade ganze Zahl und kann daher für $k \to \infty$ nicht konvergieren. ■

Herleitung der Gleichung (*):

Wir verwenden jetzt folgende Bezeichnung: $\langle x \rangle := x - \lfloor x \rfloor$. Das ist also der gebrochene Anteil von x.

Für $n < k$ lautet die Dezimalbruchentwicklung von $\langle 10^n x_0 \rangle$ so:

$(0, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \ldots)$,

und die Dezimalbruchentwicklung von $\left\langle 10^n(x_0 + \frac{\varepsilon_k}{10^k})\right\rangle$ lautet so:
$(0, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{k-1}, a_k + \varepsilon_k, a_{k+1}, \ldots)$.
Hier steht an der $(k-n)$-ten Stelle nach dem Komma $a_k + \varepsilon_k$.
(Beachte: Auf Grund der Definition von ε_k ist $a_k + \varepsilon_k$ stets $\in \{0, 1, \ldots, 9\}$.)
Es gilt $\left\langle 10^n(x_0 + \frac{\varepsilon_k}{10^k})\right\rangle < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \langle 10^n x_0\rangle < \frac{1}{2}$,
denn beides bedeutet $a_{n+1} \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, und zwar auch für den Fall $k = n + 1$.
(Siehe Definition von ε_k für den Fall $a_k = 4$.)
Wir unterscheiden nun zwei Fälle:
1. Fall: $\langle 10^n x_0\rangle < \frac{1}{2}$, also auch $\left\langle 10^n(x_0 + \frac{\varepsilon_k}{10^k})\right\rangle < \frac{1}{2}$.
In diesem Fall ist $\{10^n x_0 + \frac{\varepsilon_k}{10^{k-n}}\} = \left\langle 10^n(x_0 + \frac{\varepsilon_k}{10^k})\right\rangle$ und $\{10^n x_0\} = \langle 10^n x_0\rangle$, somit
$\{10^n x_0 + \frac{\varepsilon_k}{10^{k-n}}\} - \{10^n x_0\} = \left\langle 10^n(x_0 + \frac{\varepsilon_k}{10^k})\right\rangle - \langle 10^n x_0\rangle = \pm\frac{1}{10^{k-n}}$.
2. Fall: $\langle 10^n x_0\rangle \geq \frac{1}{2}$, also auch $\left\langle 10^n(x_0 + \frac{\varepsilon_k}{10^k})\right\rangle \geq \frac{1}{2}$.
In diesem Fall ist
$\{10^n x_0 + \frac{\varepsilon_k}{10^{k-n}}\} = 1 - \left\langle 10^n(x_0 + \frac{\varepsilon_k}{10^k})\right\rangle$ und $\{10^n x_0\} = 1 - \langle 10^n x_0\rangle$, somit
$\{10^n x_0 + \frac{\varepsilon_k}{10^{k-n}}\} - \{10^n x_0\} = -\left\langle 10^n(x_0 + \frac{\varepsilon_k}{10^k})\right\rangle + \langle 10^n x_0\rangle = \pm\frac{1}{10^{k-n}}$.
Damit ist die Gleichung (*) bewiesen. ■

Literaturverzeichnis

[1] Cigler, J.; Reichel, Ch.: Topologie. Eine Grundvorlesung. B.I.-Hochschultaschenbuch Bd. 121, 1987

[2] Dixmier, J.: General Topology. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag 1984.

[3] Franz, W.: Topologie I. Allgemeine Topologie. Sammlung Göschen Bd. 1181. Walter de Gruter & Co. 1965.

[4] Führer, L.: Allgemeine Topologie mit Anwendungen. Vieweg 1977.

[5] Munkres, J.: Topology. A first course. 2nd. ed., Prentice Hall 2000.

[6] O'Neil, P.: Fundamental concepts of topology. Gordon and Breach 1972.

[7] Schubert, H.: Topologie. Eine Einführung. 4. Aufl., Teubner 1975.

[8] Wilansky, A.: Topology for analysis. Reprint, Robert E. Krieger 1983.