UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Verena Bögelein
Sommersemester 2017

1. Übungsblatt zur Topologie
(Besprechung am 14.03.17)

Theorieaufgaben.

1. Geben Sie eine präzise Definition der Begriffe *Topologie* und *topologischer Raum* an.
2. Geben Sie eine präzise Definition der Begriffe *offener Kern*, *abgeschlossene Hülle* und *Rand* einer Menge an.

Beweisaufgaben.

Aufgabe 1 (**System der abgeschlossenen Teilmengen**).
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und

$$\mathcal{A} := \{A \subseteq X : A \text{ ist abgeschlossen bezüglich } \mathcal{T}\}$$

das Mengensytem seiner abgeschlossenen Teilmengen. Beweisen Sie folgende Eigenschaften des Sytems:

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$ und $X \in \mathcal{A}$.

(ii) $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$, wobei $n \in \mathbb{N}$.

(iii) $A_i \in \mathcal{A}$ für alle $i \in I \implies \bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$, wobei I eine beliebige Indexmenge ist.

Aufgabe 2 (**Normierte Räume und Banachräume**).

(a) Beweisen Sie: Ist X ein Banachraum und $U \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum von X, so ist U vollständig.

(b) Beweisen Sie: Ist X ein normierter Raum und U ein vollständiger Untervektorraum von X, so ist U abgeschlossen.

(c) Finden Sie ein Beispiel eines nicht abgeschlossenen Untervektorraums eines Banachraums.

Hinweis: Die Bearbeitung der Teilaufgabe (c) ist optional.

Aufgabe 3 (**Hölder-Räume**).
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, offene Menge. Wir definieren zunächst für eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und für $\alpha \in (0, 1]$ die Hölder-Halbnorm zum Exponenten α als

$$[f]_{\alpha,\Omega} := \sup_{x,y \in \Omega, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|^\alpha}$$

und definieren weiterhin den Raum der α-Hölder-stetigen Funktionen $C^{0,\alpha}(\Omega)$ durch

$$C^{0,\alpha}(\Omega) \coloneqq \{f \in C^0_{\mathrm{b}}(\Omega) \colon [f]_{\alpha,\Omega} < \infty\},$$

wobei $C^0_{\mathrm{b}}(\Omega)$ den Raum der stetigen, beschränkten, $\mathbb{R}$-wertigen Funktionen auf Ω bezeichne. Desweiteren definieren wir noch

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \coloneqq \|f\|_{\infty,\Omega} + [f]_{\alpha,\Omega}$$

mit $\|f\|_{\infty,\Omega} \coloneqq \sup_{x\in\Omega} |f(x)|$ der Supremumsnorm von f auf Ω.

Beweisen Sie nun die folgenden Aussagen:

(a) Die Abbildung $f \mapsto \|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}$ ist eine Norm auf $C^{0,\alpha}(\Omega)$.

(b) Die Abbildung $f \mapsto [f]_{\alpha,\Omega}$ ist keine Norm auf $C^{0,\alpha}(\Omega)$.

(c) Der normierte Raum $(C^{0,\alpha}(\Omega), \|.\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)})$ ist vollständig.

Hinweis: Sie dürfen hierbei ohne Beweis benutzen, dass $(C^0_{\mathrm{b}}(\Omega), \|.\|_{\infty,\Omega})$ ein Banachraum ist.