UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Verena Bögelein
Sommersemester 2017

10. Übungsblatt zur Topologie

(Besprechung am 30.05.17)

Theorieaufgaben.

1. Formulieren Sie präzise den *Auswahlsatz* aus der Vorlesung.

Beweisaufgaben.

Aufgabe 29 (**Schwache Ableitungen - Teil 1**).

(a) Sei $\Omega = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$. Gegeben sind die folgenden zwei Funktionen:

$$u(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in (-1,0) \\ 1 & \text{für } x \in [0,1) \end{cases} \quad \text{und} \quad w(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in (-1,0) \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x \in (0,1) \end{cases}$$

Sind diese Funktionen schwach differenzierbar? Bestimmen Sie gegebenenfalls ihre schwache Ableitung.

(b) Sei $\Omega = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$. Gegeben ist die Betragsfunktion

$$u(x) := |x| = \begin{cases} -x & \text{für } x \in (-1,0) \\ x & \text{für } x \in [0,1) \end{cases}$$

sowie die Funktion

$$w(x) := x^+ = \max\{x, 0\}.$$

Besitzen diese Funktionen eine schwache Ableitung? Bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

Aufgabe 30 (**Schwache Ableitungen - Teil 2**).
Sei $n > 1$ und $i \in \{1, \dots, n\}$.

(a) Zeigen Sie: Ist $u \colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar bezüglich x_i auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und u sowie $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^1_{\text{lok}}(\mathbb{R}^n)$, so ist $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ die schwache Ableitung von u auf $\mathbb{R}^n$.

(b) Wenden Sie nun diese Aussage auf die Funktion $u(x) = |x|^r$, definiert auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ an. Für welche $r \in \mathbb{R}$ existieren die schwachen Ableitungen?

Aufgabe 31 (**Eigenschaften der schwachen Ableitung**).
Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Existieren für zwei Funktionen u, v die α-ten schwachen Ableitungen $D^\alpha u$ und $D^\alpha v$, so gilt für alle $s, t \in \mathbb{R}$:

$$D^\alpha(su + tv) = sD^\alpha u + tD^\alpha v.$$

(b) Ist $u \in L^p_{\text{lok}}(\Omega)$ und $v \in L^q_{\text{lok}}(\Omega)$ schwach differenzierbar nach x_i mit $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, sowie $D_i u \in L^p_{\text{lok}}(\Omega)$ und $D_i v \in L^q_{\text{lok}}(\Omega)$, so gilt:

$$D_i(uv) = (D_i u)v + u(D_i v).$$

Hinweis: Glätten Sie die Funktionen u und v zunächst.

Bei der Vertauschung von schwachen Ableitungen ist Vorsicht geboten! Es kann vorkommen, dass $D^\beta(D^\alpha u)$ existiert, nicht jedoch $D^\alpha(D^\beta u)$.

(c) Machen Sie sich dies anhand der Funktion $u(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{|x_1|}}$ klar, indem Sie die schwachen Ableitungen $D_1(D_2 u)$ und $D_2(D_1 u)$ berechnen.

Die Existenz von $D^\alpha u$ garantiert nicht die Existenz von $D^\beta u$ für irgendeinen Multiindex β mit $|\beta| < |\alpha|$. Zeigen Sie, dass jedoch folgende Aussage gilt:

(d) Ist u schwach differenzierbar bezüglich x^α und $D^\alpha u$ schwach differenzierbar bezüglich x^β, so ist u schwach differenzierbar bezüglich $x^{\alpha+\beta}$ und es gilt:

$$D^{\alpha+\beta} u = D^\beta(D^\alpha u).$$