UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Verena Bögelein
Sommersemester 2017

11. Übungsblatt zur Topologie

(Besprechung am 13.06.17)

Theorieaufgaben.

1. Geben Sie eine präzise Definition der *Sobolev-Räume* $W^{k,p}(\Omega)$ für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p \leq \infty$.
2. Formulieren Sie beide Versionen der *Kettenregel für schwache Ableitungen* aus der Vorlesung.

Beweisaufgaben.

Aufgabe 32 (Konstanzsatz).
Beweisen Sie den folgenden Satz:

> **Satz (Konstanzsatz).** Existieren für $u \in L^1_{\text{lok}}(\Omega)$ mit $i \in \{1, \dots, n\}$ die schwachen Ableitungen $D_i u = 0$ auf dem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, so ist u konstant.

Hinweis: Benutzen Sie ein Glättungsargument.

Aufgabe 33 (Kettenregel für schwache Ableitungen).
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Berechnen Sie die schwachen Ableitungen der Funktionen

(a) $f = u^+ := \max\{u, 0\}$,

(b) $g = |u| := u^+ + u^- := \max\{u, 0\} + \max\{-u, 0\}$,

indem Sie sie auf die Kettenregel für schwache Ableitungen aus der Vorlesung zurückführen.

Hinweis: Die Funktionen $x \mapsto x^+$ und $x \mapsto |x|$ sind nicht stetig differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$. Sie müssen die Funktionen daher durch geeignete C^1-Funktionen approximieren, um die Kettenregel für schwache Ableitungen anwenden zu dürfen. Die Funktion $|x|$ können Sie z.B. durch Funktionen $h_k(x) := \sqrt{x^2 + \frac{1}{k^2}}$ approximieren.

Aufgabe 34 (Eigenschaften von Sobolev-Räumen).
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) $D^\alpha \colon W^{k,p}(\Omega) \to W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$, $u \mapsto D^\alpha u$ mit $|\alpha| \leq k$ ist ein stetiger, linearer Operator.

(b) $u_j \to u$ in $W^{k,p}(\Omega) \iff D^\alpha u_j \to D^\alpha u$ in $L^p(\Omega)$ für alle $|\alpha| \leq k$.

(c) Für $1 \leq p < q \leq \infty$ und $\mathcal{L}^n(\Omega) < \infty$ ist die Einbettung $i \colon W^{k,q}(\Omega) \to W^{k,p}(\Omega)$, $u \mapsto u$ stetig.

(d) Die Abbildung $j \colon W_0^{k,p}(\Omega) \to W_0^{k,p}(\mathbb{R}^n)$, $u \mapsto \begin{cases} u & \text{auf } \Omega, \\ 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \end{cases}$ ist eine normerhaltende Einbettung.

Hinweis: $u \in W_0^{k,p}(\Omega) :\iff \exists\, (u_j) \subset C_0^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ mit $\|u - u_j\|_{W^{k,p}(\Omega)} \to 0$ bei $j \to \infty$.

Aufgabe 35 (**Äquivalente Sobolev-Normen**).
Beweisen Sie, dass die auf $W^{k,p}(\Omega)$ definierten Normen $\|.\|$ bzw. $|\!|\!|.|\!|\!|$, definiert durch

$$\|u\| := \left(\sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, d\mathcal{L}^n \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{bzw.} \quad |\!|\!|u|\!|\!| := \sum_{|\alpha| \le k} \left(\int_\Omega |D^\alpha u|^p \, d\mathcal{L}^n \right)^{\frac{1}{p}}$$

äquivalent sind.

Erinnerung: Zwei Normen $\|.\|$ und $|\!|\!|.|\!|\!|$ auf einem Vektorraum X heißen *äquivalent*, wenn es zwei nichtnegative Konstanten C_1, C_2 gibt, sodass $\|x\| \le C_1 |\!|\!|x|\!|\!|$ und $|\!|\!|x|\!|\!| \le C_2 \|x\|$ für alle $x \in X$.

Aufgabe 36 (**Integralcharakterisierungen von L^p und $W^{k,p}$**).
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N}$, $1 < p \le \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Beweisen Sie folgende Äquivalenzen:

(a) $u \in L^p(\Omega) \iff u \in L^1_{\text{lok}}(\Omega)$ und $\left| \int_\Omega u\zeta \, d\mathcal{L}^n \right| \le C \|\zeta\|_{L^q(\Omega)}$ für alle $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$.

(b) $u \in W^{k,p}(\Omega) \iff u \in L^1_{\text{lok}}(\Omega)$ und $\left| \int_\Omega u D^\alpha \zeta \, d\mathcal{L}^n \right| \le C \|\zeta\|_{L^q(\Omega)}$ für alle $|\alpha| \le k$ und alle $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$.

Hinweis: Benutzen Sie für „$\Longleftarrow$“ unter Anderem den Satz von Hahn-Banach.