UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Verena Bögelein
Sommersemester 2017

12. Übungsblatt zur Topologie

(Besprechung am 20.06.17)

Theorieaufgaben.

1. Definieren Sie den Begriff des *Skalarprodukts* auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum.
2. Geben Sie die von einem Skalarprodukt *induzierte Norm* an und definieren Sie die Begriffe *Prähilbertraum* bzw. *Hilbertraum*.
3. Formulieren Sie die *Cauchy-Schwarz-Ungleichung* und die *Parallelogrammgleichung*.

Beweisaufgaben.

Aufgabe 37 (Fundamentallemma der Variationsrechnung).
Beweisen Sie das *Fundamentallemma der Variationsrechnung* für L^1_{lok}-Funktionen: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in L^1_{\text{lok}}(\Omega)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $u = 0$ $\mathcal{L}^n$-fast überall.

(ii) $\int_\Omega u\varphi \, dx = 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Hinweis: Eine Implikation ist trivial. Beweisen Sie die andere Implikation zunächst für den Fall, dass u stetig ist, glätten Sie u anschließend im allgemeinen Fall und beweisen Sie, dass $u_\varepsilon(x) \to u(x)$ für $\mathcal{L}^n$-fast alle $x \in \Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ gilt.

Tipp: Benutzen Sie zum Nachweis der punktweisen Konvergenz $\mathcal{L}^n$-fast überall den *Differentiationssatz von Lebesgue*, welcher besagt: Für $f \in L^1_{\text{lok}}(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $\mathcal{L}^n$-fast jeder Punkt $x \in \Omega$ ein *Lebesgue-Punkt*, d.h. es gilt

$$\lim_{\rho \downarrow 0} ⨍_{B_\rho(x)} |f(y) - f(x)| \, dy = 0.$$

Bezeichnungen: Der Wert $f(x)$ heißt dann auch *Lebesguewert* von f im Punkt x und der auf der Menge der Lebesgue-Punkte definierte Repräsentant heißt auch *Lebesgue-Repräsentant* von f.

Aufgabe 38 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung und induzierte Norm).
Sei $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt.

(a) Beweisen Sie die *Cauchy-Schwarz-Ungleichung*:

$$|\langle x, y \rangle|^2 \le \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle.$$

(b) Beweisen Sie, dass der Ausdruck

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

eine Norm auf X definiert.

Hinweis zu (a): Betrachten Sie den Ausdruck $0 \le \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle$ und wählen Sie $\lambda \in \mathbb{C}$ geeignet.

Aufgabe 39 (Polarisationsformel).
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, in welchem die *Parallelogrammgleichung*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

erfüllt sei. Zeigen Sie, dass dann durch den Ausdruck

$$\langle x, y\rangle \coloneqq \tfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

ein Skalarprodukt auf X definiert wird.

Hinweis zur Homogenität: Beweisen Sie die Homogenität von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ im ersten Argument zunächst für alle $\lambda \in \mathbb{N}_0$, anschließend für $\lambda \in \mathbb{Z}$ und $\lambda \in \mathbb{Q}$. Verwenden Sie schließlich im Fall $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Stetigkeitsargument.